

Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Тульский государственный педагогический  
университет им. Л.Н. Толстого»  
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого)

УДК 511

Рег. № НИОКТР 122122800070-3

Рег. № ИКРСБ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научно-исследовательской работе  
ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»  
д-р пед. наук, профессор



Е.Ю. Ромашина

2024 г.

**ОТЧЕТ**

**О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ**

Теоретико-числовые методы

в приближенном анализе и их приложения в механике и физике  
(заключительный)

в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ  
№ 073-00033-24-01 от 09.02.2024


Руководитель НИР,  
заведующий лабораторией, к.ф.-м.н.

Н. Н. Добровольский

Тула 2024


## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР,  
заведующий лабораторией, к.ф.-м.н.


 20.12.2024 Н. Н. Добровольский  
(подпись, дата) (разделы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

Исполнители:

Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.,  
профессор

 20.12.24 Н. М. Добровольский  
(подпись, дата) (разделы 1, 2, 3, 5)

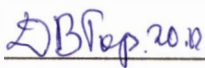
Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.,  
доцент

 20.12.24 С. А. Скобелцын  
(подпись, дата) (раздел 3, 6, 7)


Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.,  
профессор

 20.12.2024 Л. А. Толоконников  
(подпись, дата) (раздел 3, 6)


Руководитель аналитической группы,  
д.ф.-м.н., профессор

 20.12.24 Д. В. Горбачев  
(подпись, дата) (раздел 7)

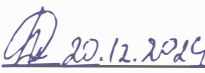
Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.,

 20.12.2024 Ю. А. Басалов  
(подпись, дата) (раздел 3, 5)


Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.,  
доцент

 20.12.2024 И. Ю. Реброва  
(подпись, дата) (раздел 1, 2, 5)


Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.,  
доцент

 20.12.2024 Д. А. Нургулеев  
(подпись, дата) (раздел 3, 6)


Младший научный сотрудник,

 20.12.24 А. В. Родионов  
(подпись, дата) (раздел 1, 2, 5)


Лаборант-исследователь

 20.12.2024 Д. Ю. Ефимов  
(подпись, дата) (раздел 3, 6)


Лаборант-исследователь

 20.12.24 А. П. Крылов  
(подпись, дата) (раздел 1, 2, 5)


Лаборант-исследователь

 20.12.24 Р. Лепетков  
(подпись, дата) (раздел 7)

Лаборант-исследователь

 20.12.24 С. Подолян  
(подпись, дата) (раздел 1, 2, 5)

Лаборант-исследователь

 20.12.24 В. Филатова  
(подпись, дата) (раздел 7)

## РФЕРАТ

Отчет 202 с., 1 кн., 24 рис., 208 ист.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЁТКИ, ОБОБЩЁННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНЫЕ СЕТКИ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РЕШЁТОК, МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО РЕШЁТОК, АБСОЛЮТНО МИНИМАЛЬНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ, МЕТОД ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАНКЛЯ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ, СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ, УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Объектом исследования являются теоретико-числовые объекты – дзета-функция решеток, квадратурные и интерполяционные формулы, преобразования гармонического анализа, тригонометрические суммы сеток и решёток, методы применения теоретико-числовых объектов в задачах акустики.

Цель работы исследовать дзета-функции различных решёток, интерполяционные и квадратурные формулы по теоретико-числовым сеткам.

В процессе работы проводились фундаментальные исследования на стыке аналитической теории чисел, геометрии чисел, функционального анализа, численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, а также акустики, результаты которых оформлены в виде статей и докладывались на конференциях.

В результате фундаментальных исследований получены результаты показывающие высокую точность интерполяции по параллелепipedальным сеткам и сведения многомерной задачи интерполяции к одномерной.

Разработана библиотека численного интегрирования и интерполирования по параллелепipedальным сеткам, апробированная при решении задач акустики и показавшая свою эффективность.

Эффективность полученных методов обусловлена высокой точностью реализованных вычислительных процессов и малой трудоемкостью вычислений. Разработанные методы могут применяться как при решении фундаментальных задач теории акустики, так и прикладных задач, использующих схожий математический аппарат.

# Содержание

Введение	7
<b>1 Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепипедальные сетки</b>	<b>28</b>
1.1 Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток . . . . .	28
1.2 Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток . . . . .	29
1.3 Обобщённые параллелепипедальные сетки . . . . .	31
1.4 Приведение базиса решётки к треугольному виду . . . . .	32
1.5 Построение обобщённой параллелепипедальной сетки . . . . .	34
<b>2 Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполя- ция.</b>	<b>36</b>
2.1 Квазипорядок на $\mathbb{R}^s$ и множества Быковского . . . . .	36
2.2 Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области . . .	38
2.3 Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского . . . . .	40
2.4 Обозначения и необходимые факты . . . . .	43
2.4.1 Из геометрии чисел . . . . .	44
2.4.2 Тригонометрические суммы сеток и решёток . . . . .	48
2.4.3 Неравенства для перенормировок на пространстве $E_s^\alpha$ . . . . .	49
2.4.4 Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипе- дальной сетки целочисленной решётки . . . . .	52
2.4.5 Свойства оператора интерполирования . . . . .	54
2.4.6 Оценки погрешности интерполирования . . . . .	57
2.5 Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с пра- вилком останковки . . . . .	58
2.6 Вложенные последовательности параллелепипедальных сеток . . . . .	62
<b>3 Разработка программного обеспечения численного интегрирования и интерполирования</b>	<b>68</b>
3.1 Библиотека численного интегрирования MathAlgo.Integration . . . . .	68
3.2 Библиотека численного интегрирования MathAlgo.Interpolation . . . . .	78

<b>4</b>	<b>Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье</b>	<b>86</b>
4.1	Некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$	86
4.2	Операторы обобщенного сдвига	89
4.3	Свертки	95
4.4	Обобщенные средние. $L^p$ -сходимость	96
4.5	Обобщенные средние. Сходимость почти всюду	98
4.6	Приложение	100
4.7	Некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье	103
4.8	Операторы обобщенного сдвига	104
4.9	Свертки	111
4.10	Обобщенные средние. Сходимость в пространствах $L^p$	112
<b>5</b>	<b>Дискретное преобразование Фурье на параллелепипедальных сетках</b>	<b>115</b>
5.1	Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье	115
5.2	Сведение многомерной Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетки к одномерной	116
5.3	О быстром преобразование Фурье	117
<b>6</b>	<b>Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн</b>	<b>119</b>
6.1	Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства	119
6.2	Постановка задачи	120
6.3	Математическая модель задачи	120
6.4	Аналитическое решение задачи	122
6.5	Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости	123
6.6	Отражение сферической волны	126
6.7	Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины	127
6.8	Постановка задачи	128
6.9	Аналитическое решение	129
6.10	Построение теоретико-числовой сетки	134
6.11	Численные исследования	134
6.12	Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости	138
6.13	Постановка задачи	139
6.14	Аналитическое решение задачи	140
6.15	Численные исследования	143
6.16	Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем	145
6.17	Постановка задачи	146
6.18	Математическая модель задачи	146
6.19	Аналитическое решение задачи	148
6.20	О решении обратной задачи	151

6.21	Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства . . . . .	152
6.22	Постановка задачи . . . . .	153
6.23	Аналитическое решение . . . . .	154
6.24	О решении обратной задачи . . . . .	160
6.25	Численные исследования . . . . .	162
6.26	Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде . . . . .	164
6.27	Постановка задачи . . . . .	165
6.28	Аналитическое решение задачи . . . . .	165
6.29	Численные исследования . . . . .	170
<b>7</b>	<b>Решение задачи дифракции плоской звуковой волны методом граничных элементов</b>	<b>172</b>
7.1	Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы . . . . .	172
7.2	Основные сведения о задаче . . . . .	173
7.3	Комбинированный метод конечных элементов . . . . .	176
7.4	Метод граничных элементов . . . . .	177
7.5	Результаты и сравнение . . . . .	183
	<b>Заключение</b>	<b>185</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>189</b>

# Введение

В программе исследований по теме "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике", определены следующие 6 направлений.

1. Построение теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю.

2. Получение новых форм функционального уравнения для гиперболической дзета-функции Гурвица и для гиперболической дзета-функции декартовых решёток.

3. Формирование новой теории приближения алгебраических решёток целочисленными решётками.

4. Формирование новой теории оценки погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул для заданного класса теоретико-числовых сеток.

5. Разработка прикладного программного обеспечения, реализующего численное интегрирование и интерполирование, решение интегральных и дифференциальных уравнений.

6. Получение интегральных представлений для ядер обобщенного преобразования Фурье, построение новых операторов обобщенного сдвига, доказательство условий ограниченности обобщенного преобразования Рисса и обобщенных преобразований Рисса в функциональных пространствах с весом.

7. Решение задач дифракции звуковых волн с применением теоретико-числового метода в приближенном анализе.

**Построение теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю**

Как хорошо известно из элементарной теории сравнений мультипликативная группа  $\mathbb{Z}_p^*$  поля вычетов  $\mathbb{Z}_p$  по простому модулю  $p$  является циклической группой порядка  $p-1$ , которая имеет  $\varphi(p-1)$  образующих элементов — первообразных корней. Если  $G \subset \mathbb{Z}_p^*$  произвольная подгруппа, то множество  $M(G, p)$ , заданное равенством

$$M(G, p) = \{m \in \mathbb{N} | m \equiv g \pmod{p}, g \in G\},$$

является мультипликативным моноидом без однозначного разложения на простые элементы.

Последнее утверждение легко объяснить. Дело в том, что каждый класс вычетов по модулю  $p$ , взаимно простой с модулем, по теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии содержит бесконечно много простых чисел. Отсюда следует, что моноид  $M(G, p)$  содержит бесконечно много псевдопростых элементов, которые являются произведением простых чисел, не входящих в моноид  $M(G, p)$ . Именно эти псевдопростые числа и создают эффект неоднозначности разложения на простые элементы.

Отсюда следует, что дзета-функция  $\zeta(M(G, p)|\alpha)$  моноида  $M(G, p)$  не равна соответствующему произведению Эйлера.

Нетрудно указать подмоноид  $M^*(G, p)$  с однозначным разложением на простые числа. Определим его следующим образом

$$M^*(G, p) = \left\{ m = \prod_{\nu=1}^k p_{\nu}^{\beta_{\nu}} \mid p_{\nu} \equiv g_{\nu} \pmod{p}, g_{\nu} \in G, \nu = 1, \dots, k \right\}.$$

Таким образом, имеем:

$$\zeta(M^*(G, p)|\alpha) = \prod_{p_{\nu} \equiv g_{\nu} \pmod{p}, g_{\nu} \in G} \left(1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Одним из актуальных вопросов теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю, является вопрос о справедливости эффекта Дэвенпорта и Хейльбронна [4] о нулях дзета-функции моноида  $M(G, p)$ .

#### Функциональное уравнение

Пусть  $\mathbb{P}_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$  — множество  $k$ -ых степеней всех простых чисел. Ясно, что  $M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$ , а  $M(\mathbb{P}_k) = \mathbb{N}_k = \{1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots\}$  — множество  $k$ -ых степеней всех натуральных чисел. Моноид  $M(\mathbb{P}_k)$  — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество  $\mathbb{P}_k$ . Легко видеть, что моноид  $M(\mathbb{P}_k)$  имеет единичную степенную  $\frac{1}{k}$ -плотность, так как  $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$ .

Нетрудно видеть, что моноид  $M(\mathbb{P}_k)$  регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга  $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = x^{\frac{1}{k}} + O(1)$ , так как при  $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ ,  $\pi N \geq |t| \geq 2\pi$  для  $\alpha = \sigma + it$  справедлива формула

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^{\alpha}} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha - \theta}} + O\left(\frac{1}{N^{\sigma}}\right),$$

где постоянная в знаке  $O$  зависит только от  $\sigma_0$ . Действительно,  $\zeta(M(\mathbb{P}_k)|\alpha) = \zeta(k\alpha)$ ,

$$\sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n^k \leq N} \frac{1}{n^{k\alpha}}, \quad \zeta(k\alpha) = \sum_{n \leq N^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{n^{k\alpha}} + \frac{N^{\frac{1-k\alpha}{k}}}{k\alpha - 1} + O(N^{-\sigma}).$$

Так как  $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$ , то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел. Более того, из асимптотического закона распределения простых чисел (См. [1], стр. 59)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$$



следует, что для моноида  $M(\mathbb{P}_k)$  выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{du}{\ln u} + O\left(x^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\ln x}}\right).$$

Рассмотрим последовательность, полученную объединением двух моноидов  $M(\mathbb{P}_k)$  и  $M(\mathbb{P}_{k+1})$ ,  $M_{k,k+1} = M(\mathbb{P}_k) \cup M(\mathbb{P}_{k+1})$ . Нетрудно видеть, что  $M(\mathbb{P}_k) \cap M(\mathbb{P}_{k+1}) = M(\mathbb{P}_{k(k+1)})$ . Отсюда следует, что  $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = [x^{\frac{1}{k}}] + [x^{\frac{1}{k+1}}] - [x^{\frac{1}{k(k+1)}}]$ . Таким образом, последовательность  $M_{k,k+1}$  имеет степенную плотность с  $\theta = \frac{1}{k}$  и удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с  $\theta_1 = \frac{1}{k+1}$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{k(k+1)}$ ,  $\theta_3 = 0$ , так как  $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{1}{k+1}} - x^{\frac{1}{k(k+1)}} + O(1)$ . Для дзета-функции справедливо равенство

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha),$$

из которого следует, что  $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha)$  — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точек  $\alpha_1 = \frac{1}{k}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{k+1}$  и  $\alpha_3 = \frac{1}{k(k+1)}$ , в которых полюса первого порядка, а абсцисса абсолютной сходимости удовлетворяет равенству  $\sigma_{M_{k,k+1}} = \frac{1}{k}$ .

Пользуясь функциональным уравнением для дзета-функции Римана мы можем написать и функциональное уравнение для  $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha)$ . Действительно, при  $\alpha = \sigma + it$ ,  $\sigma < 0$  имеем:

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha) + M((k+1)\alpha)\zeta(1-(k+1)\alpha) - M(k(k+1)\alpha)\zeta(1-k(k+1)\alpha),$$

где  $M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}$  — множитель Римана.

Нетрудно видеть, что аналогичные примеры можно строить и для объединения нескольких моноидов со степенной плотностью, для которого будет выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина.

Актуальной задачей является расширение классов моноидов и последовательностей натуральных чисел, для которых можно найти функциональное уравнение для соответствующей дзета-функции.

### **Приближения алгебраических решёток целочисленными решётками**

По-прежнему, остаётся актуальной задача приближения алгебраических решёток целочисленными. Удовлетворительное решение этой проблемы получено только для случая квадратичных полей, хотя и в этом случае остаются нерешёнными некоторые важные задачи. К числу таких нерешённых задач относится проблема соотношений между множеством Быковского для целочисленных решёток и множеством локальных минимумов для алгебраической решётки.

Интерес к этой проблеме обусловлен тем фактом, что сумма Быковского оценивает гиперболическую дзета-функцию решётки снизу и сверху с точностью до множителя, ограниченного некоторой константой, не зависящей от решётки.

Другой вопрос связан с задачей интерполирования. В последнее время установлены важные свойства интерполяционных многочленов для периодических функций, построенных по параллелепipedальным сеткам. Возникает вопрос о погрешности таких интерполяционных формул, если соответствующая целочисленная решётка является хорошим приближением алгебраической решётки.

**Оценки погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул**

Вопросы, связанные с оценкой погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул был поставлен в работе [2].

Для произвольных целых  $m_1, \dots, m_s$  суммы  $S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$ , определённые равенством

$$S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (1)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

**ТЕОРЕМА 1.** *Если  $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$ , то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$\begin{aligned} |R_N[f]| &\leq C \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ &= C \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}), \end{aligned} \quad (2)$$

где сумма  $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$  определена равенством (1). На классе  $E_s^\alpha(C)$  эту оценку нельзя улучшить.

Согласно теореме 1 для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left( \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции  $\|f\|_{E_s^\alpha}$ , как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье  $C(\vec{0})$ . Более того, относительно параметра гладкости  $\alpha$  для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции.

Таким образом, возникает задача как по результатам приближенного интегрирования по нескольким квадратурным формулам получить достоверную информацию о значении интеграла и достигнутой точности приближенного интегрирования. Основы соответствующей теории об алгоритмах с правилами остановки заложена в упомянутой работе [2] и в настоящее время актуальной задачей является разработка библиотеки программ, реализующих алгоритмы интегрирования с правилами остановки.

Здесь уместно напомнить замечания профессора Н. М. Коробова из монографии [3] (стр. 159): "Вместе с тем следует отметить, что преимущество лучшей формулы не обязательно обнаруживается сразу. Не исключена, очевидно, возможность того, что это преимущество выявиться лишь при весьма больших значениях  $N$ , в связи с чем применение лучшей формулы может оказаться нецелесообразным. Поэтому в вычислительной практике при выборе квадратурной формулы необходимы соответствующие эксперименты."

**Интегральные представления для ядер обобщенного преобразования Фурье**

В гармоническом анализе на прямой со степенным весом сначала появилось унитарное преобразование Данкля, зависящее от одного параметра  $k \geq 0$ , а затем двухпараметрическое  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье, частным случаем которого является преобразование Данкля ( $a = 2$ ).

Наличие параметра  $a > 0$  при  $a \neq 2$  приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности.

В случае последовательности  $a = 2/(2r + 1)$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье весьма слабые и после некоторой замены переменных они исчезают.

Получаемое унитарное преобразование при  $r = 0$  дает обычное преобразование Данкля и обладает многими его свойствами. Оно названо обобщенным преобразованием Данкля.

В дальнейшей работе предполагается определить оператор сплетения, устанавливающий связь дифференциально-разностного оператора второго порядка, для которого ядро обобщенного преобразования Данкля является собственной функцией, с одномерным оператором Лапласа и позволяющий записать ядро в удобном для его оценок виде. В отличие от оператора сплетения для преобразования Данкля он имеет ненулевое ядро.

В дальнейшей работе предполагается также на основе свойств обобщенного преобразования Данкля установить свойства  $(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье при  $a = 2/(2r + 1)$ .

Исследования по этим направлениям, развивающие классические работы по аналитической теории чисел, гармоническому анализу и механики, позволили получить новые не имеющие аналогов результаты, разбитые по главам.

### **Глава 1. Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепipedальные сетки.**

В данной главе приводятся новые свойства гиперболической дзета-функции диагональных двумерных унимодулярных решёток. Доказывается теорема об аналитическом продолжении этой функции.

В работе [8] была доказана полнота метрического пространства двумерных диагональных унимодулярных решёток. Каждая двумерная диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (см. [6], [9]).

Первая цель данной главы — описать свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток в левой полуплоскости.

Так как определение обобщенной параллелепipedальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной главе предложены алгоритмы построения обобщенных параллелепipedальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

При решении задач многомерного численного интегрирования большую роль играет выбор сеток, с помощью которых строятся квадратурные формулы.

Использование равномерных сеток в этом случае затруднено в силу «проклятья

размерности», а при применении случайных или псевдослучайных последовательностей нельзя на классе аналитических функций получить оценку погрешности лучшую, чем  $|R_N[f]| = O(N^{-1})$ , где  $N$  — число точек сетки.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с использованием параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами.

Для этих формул на классе  $E_s^\alpha$  выполняется оценка погрешности  $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$ , где  $\gamma$  зависит только от размерности  $s$  и порядка гладкости  $\alpha$ .

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами  $N$ ,  $\alpha$  и  $s$ . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Подробнее о классах функций и погрешностях интегрирования с использованием различных видов сеток см., например [10].

Вторая цель данной главы — описать алгоритмы построения одного из видов таких сеток — обобщённых параллелепипедальных сеток.

## **Глава 2. Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполяция.**

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В 2002 году В. А. Быковский получил принципиально новые оценки снизу и сверху, которые совпадали по порядку.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценке гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру даётся модифицированная оценка Быковского через минимальные решения линейного сравнения.

Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях дополняется обобщённой леммой Коробова об оценке остаточного ряда и рядом других модификаций в доказательстве теоремы Бахвалова—Коробова, что и позволило доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценке гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left( \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где  $(a_j, N) = 1$  ( $j = 1, \dots, s$ ), и соответствующие квадратурные формулы с равными

весаами

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где  $R_N[f]$  – погрешность квадратурной формулы.

На классе  $E_s^\alpha$  периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad (\text{Н. С. Бахвалов [13], Н. М. Коробов [28]}).$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции  $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$  ( $\alpha > 1$ ) решётки и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda(\vec{a}, N)} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}, \quad (3)$$

где  $\sum'$  означает, что из области суммирования исключен набор  $\vec{m} = \vec{0}$ , а символ Коробова  $\delta_N(a)$  задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Усеченным норменным спектром решётки  $\Lambda$  называется множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением усеченной нормы. Порядок точки  $\lambda$  усеченного норменного спектра обозначим через  $q(\lambda)$ .

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки  $\Lambda$  можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)^{-\alpha} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda) \lambda^{-\alpha}. \quad (4)$$

В работе [41] было получено усиление леммы Н. М. Коробова о числе решений линейного сравнения в прямоугольных областях, что позволило усилить классическую

теорему Н. С. Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функции целочисленной решётки решений линейного сравнения.

Дальнейший анализ проблемы оценки числа решений линейного сравнения в прямоугольных областях и сопоставления с результатами В. А. Быковского из работы [15] показали, что можно объединить подходы Н. М. Коробова доказательства теоремы Н. С. Бахвалова с подходами В. А. Быковского.

Первая цель работы — описать новую оценку сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях и усиленную теорему Бахвалова — Быковского.

В работе [50] были изучены аналоги Фурье интерполяции для случая, когда периодическая функция многих переменных задана в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решетки. Была построена теория интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепипедальную сетку целочисленной решетки.

В работе [2] было изучено распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток и применено это распределение для произведения некоторых типов сеток. В частности, были рассмотрены такие новые понятия как: алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки; концентрический алгоритм приближенного интегрирования; линейный оператор  $A_{M,\vec{b}}$  взвешенных сеточных средних на пространстве периодических функций  $E_s^\alpha$ .

Вторая цель данной главы перенести указанные понятия на теорию интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепипедальную сетку целочисленной решетки, и рассмотреть концентрические алгоритмы приближенного интерполирования по обобщенным параллелепипедальным сеткам целочисленных решёток.

Также главе дается обзор по результатам Тульской школы теории чисел по вопросам интерполяции периодических функций многих переменных, заданных в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решетки, и по алгоритмам численного интегрирования с правилом остановки, необходимые для понимания основного результата исследований за 2023 год, приведенный в главе 4. Приводятся необходимые факты из: геометрии чисел; тригонометрических сумм сеток и решёток; неравенств для перенормировок на пространстве  $E_s^\alpha$ ; интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решётки; свойства оператора интерполирования; оценки погрешности интерполирования. Наряду с известными фактами и определениями, полученными ранее в Тульской школе теории чисел, содержатся новые понятия и факты связанные с интерполированием по сдвинутому параллелепипедальным сеткам.

Также в главе приводятся алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом остановки содержит новые определения, связанные с переносом понятия концентрический алгоритм приближенного интегрирования на случай мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интерполирования.

В главе излагаются новые вопросы приближенного интерполирования с правилами остановки. Рассмотрен наиболее важный и интересный для практической реализации случай вложенных последовательностей параллелепипедальных сеток. Получена оценка нормы разности двух операторов интерполирования по решётке и подрешётке, что позволило в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного

интерполирования периодических функций взять величину максимума модуля разности этих операторов на точках большей параллелепипедальной сетки.

### **Глава 3 Разработка программного обеспечения численного интегрирования интерполирования**

В данной главе приведены алгоритмы на которых основана разработанная библиотека численного многомерного интегрирования `MathAlgo.Integration`, опубликованная в пакетном менеджере `Nuget` (<https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Integration>).

Использование теоретико-числовых алгоритмов позволяет, либо увеличить на порядки точность при одинаковой трудоемкости, либо сократить в разы трудоемкость, решения задачи численного интегрирования в задачах акустики по распространению плоских волн. Данные задачи возникают при интегрирование сферических гармоник, либо при сведении дифференциальных уравнений в частных производных или интегральных уравнений к вычислению кратных интегралов.

Так же в данной главе приведены алгоритмы на которых основана разработанная библиотека численного многомерного интерполирования `MathAlgo.Interpolation`, опубликованная в пакетном менеджере `Nuget` (<https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Interpolation>).

### **Глава 4 Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье**

С 2012 года в гармоническом анализе на прямой со степенным весом интенсивно изучается двухпараметрическое  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье, предложенное S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Orsted и обобщающее преобразование Данкля ( $a = 2$ ), зависящее только от одного параметра  $k \geq 0$ . Вместе с увеличением разнообразия унитарных преобразований наличие параметра  $a > 0$  при  $a \neq 2$  приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Быстрое убывание сохраняется только для последовательности  $a = 2/n, n \in \mathbb{N}$ . Некоторая замена переменной в этом случае улучшает и другие свойства обобщенного преобразования Фурье. Обобщенное преобразование Данкля, получающееся после замены переменной при  $a = 2/(2r + 1), r \in \mathbb{Z}_+$ , лишено деформационных свойств и, в значительной степени, уже изучено. В настоящей работе изучается обобщенное преобразование Ганкеля, получающееся после замены переменной при  $a = 1/r, r \in \mathbb{N}$ . Для него описано инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, найден дифференциально-разностный оператор, для которого ядро обобщенного преобразования Ганкеля является собственной функцией. На основе новой теоремы умножения для функций Бесселя Voubatra — Negzaoui — Sifi построены два оператора обобщенного сдвига, исследована их  $L^p$ -ограниченность и положительность. Для теоремы умножения дано простое доказательство. Определены две свертки, для которых доказаны теоремы Юнга. С помощью сверток определены обобщенные средние, для которых предложены достаточные условия  $L^p$ -сходимости и сходимости почти всюду. Исследованы обобщенные аналоги средних Гаусса — Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса.

Пусть  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}$  и быстро убывающих на бесконечности функций,  $J_\alpha(x)$  — функция Бесселя первого рода порядка

$\alpha \geq -1/2$ ,  $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) x^{-\alpha} J_\alpha(x)$  — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1), \quad n \geq 1,$$

— символ Похгаммера.

Пусть  $a > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $2k + a - 1 > 0$ ,  $\lambda = (2k - 1)/a$ ,  $v_{k,a}(x) = |x|^{2k+a-2}$  — степенной вес,  $d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx$  — нормированная мера на прямой,  $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda + 1)$ .

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [70] определили двухпараметрическое  $(k, a)$ -обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) b_{k,a}(xy) d\mu_{k,a}(x), \quad (5)$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy) = j_\lambda\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 + 2/a)} \frac{xy}{(ai)^{2/a}} j_{\lambda + \frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right). \quad (6)$$

Оно стало обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ( $a = 2, k = 0$ ), а также обобщением преобразования Данкля ( $a = 2$ ) [71]. Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при  $a \neq 2$  обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным [72]. В частности,  $\mathcal{F}_{k,a}(f)$  быстро убывает на бесконечности для любой  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , если только  $a = \frac{2}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Понятно, что деформационные свойства во многом связаны с аргументом  $|xy|^{a/2}$  в ядре (6). Если в (5) и (6) сделать замены

$$(2/a)^{1/2}|x|^{a/2} \text{sign} x \rightarrow x, \quad (2/a)^{1/2}|y|^{a/2} \text{sign} y \rightarrow y, \quad (7)$$

то мера  $d\mu_{k,a}(x)$  перейдет в меру  $d\nu_\lambda(x) = c_\lambda |x|^{2\lambda} dx$ ,  $c_\lambda^{-1} = 2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda + 1)$ , ядро (6) перейдет в ядро

$$e_{k,a}(xy) = j_\lambda(xy) + \frac{e^{-i\pi/a} \Gamma(\lambda + 1)}{2^{2/a} \Gamma(\lambda + 1 + 2/a)} |xy|^{2/a} \text{sign}(xy) j_{\lambda + \frac{2}{a}}(xy),$$

а унитарное преобразование (5) — в унитарное преобразование

$$\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{k,a}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

Если  $a = \frac{2}{2r+1}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , то функция  $e_{k,a}(x)$  будет целой функцией экспоненциального типа 1 и преобразование  $\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}$  становится недеформированным. Оно носит название обобщенного преобразования Данкля, так как при  $r = 0$  получается обычное преобразование Данкля. Свойства обобщенного преобразования Данкля изучены в [72, 73].

В настоящей работе мы остановимся на свойствах преобразования  $\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}$  при  $a = \frac{1}{r}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Мы назовем его обобщенным преобразованием Ганкеля. Оно имеет вид

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x), \quad (8)$$



где  $\lambda > -1/2$ ,

$$e_{r,\lambda}(x) = j_\lambda(x) + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r}(x). \quad (9)$$

Хотя функция (9) имеет конечную гладкость в нуле, мы увидим, что преобразование (8) является достаточно содержательным.

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_\lambda} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\nu_\lambda(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$  — множество непрерывных ограниченных функций,  $C_0(\mathbb{R})$  — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций,  $C_K(\mathbb{R})$  — множество непрерывных функций с компактным носителем. Как обычно, показатель  $p$  и сопряженный показатель  $p'$  связаны соотношением  $1/p + 1/p' = 1$ .

Мы будем писать  $A \lesssim B$ , если выполнено неравенство  $A \leq cB$  с константой  $c > 0$ , зависящей только от несущественных параметров. Для функции  $f(x)$ , заданной на прямой,  $f_e(x)$ ,  $f_o(x)$  — ее четная и нечетная части.

Для преобразования (8) устанавливается инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций и находится дифференциально-разностный оператор, для которого ядро  $e_{r,\lambda}(xy)$  является собственной функцией по каждой переменной. Строятся два оператора обобщенного сдвига. Построения существенно опираются на новую теорему умножения для нормированных функций Бесселя, установленную в 2022 году М.А. Boubatra, S. Negzaoui и М. Sifi [75]. В приложении для нее дается простое доказательство. Определяются две свертки и для них приводятся неравенства Юнга. Для обобщенных средних, определяемых с помощью сверток, исследуется сходимость в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  и почти всюду.

Также в главе излагаются свойства двухпараметрического  $(k, a)$ -обобщенного преобразование Фурье  $\mathcal{F}_{k,a}$ ,  $k, a > 0$ , на прямой. При  $a \neq 2$  оно обладает деформационными свойствами и, в частности, для функции  $f$  из пространства Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}_{k,a}(f)$  может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Доказано, что инвариантным множеством для обобщенного преобразования Фурье  $\mathcal{F}_{k,a}$  и дифференциально-разностного оператора  $|x|^{2-a} \Delta_k f(x)$ , где  $\Delta_k$  — лапласиан Данкля, является класс

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2}): F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 \text{ — четные}\}.$$

Для  $a = 1/r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , рассмотрены два оператора обобщенного сдвига  $\tau^y$  и  $T^y = (\tau^y + \tau^{-y})/2$ . Для них предложены простые интегральные представления, позволившие доказать их  $L^p$ -ограниченность при  $1 \leq p \leq \infty$  и  $\lambda = r(2k-1) > -1/2$ . При  $\lambda \geq 0$  оператор  $T^y$  положительный и его  $L^p$ -норма равна 1. Определены две свертки и для них доказана теорема Юнга. Для обобщенных средних, определенных с помощью сверток, установлено достаточное условие  $L^p$ -сходимости. Изучены обобщенные аналоги средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса.

Пусть  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}$  и быстро убывающих на бесконечности функций,  $J_\alpha(x)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $\alpha$ ,  $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha} J_\alpha(x)$  — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1), \quad n \geq 1,$$

— символ Похгаммера,

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

— преобразование Фурье на прямой  $\mathbb{R}$ .

Преобразование Фурье является унитарным преобразованием на прямой с единичным весом. Совершенно естественно возникает вопрос о его унитарных обобщениях для случая прямой с весом. Для прямой со степенным весом  $|x|^{2\lambda+1}$ ,  $\lambda \geq -1/2$ , таким обобщением стало преобразование Данкля (см. [88, 89])

$$\mathcal{F}_\lambda(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x),$$

где ядро и мера на прямой равны

$$e_\lambda(xy) = j_\lambda(xy) - \frac{ixy}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(xy), \quad d\nu_\lambda(x) = \frac{|x|^{2\lambda+1} dx}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)}.$$

Преобразование Фурье получается при  $\lambda = -1/2$ . Для преобразования Данкля, как и для преобразования Фурье, пространство Шварца является инвариантным.

Пусть  $a > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $2k + a - 1 > 0$ ,  $\lambda = (2k-1)/a$ ,  $v_{k,a}(x) = |x|^{2k+a-2}$  — степенной вес,  $d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx$  — нормированная степенная мера на прямой,  $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda+1)$ ,  $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций ( $L^\infty(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) = L^\infty(\mathbb{R})$ ) с конечной нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_{k,a}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_{k,a} \right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$  — подмножество  $L^\infty(\mathbb{R})$  непрерывных функций,  $C_0(\mathbb{R})$  — подмножество  $C_b(\mathbb{R})$  исчезающих на бесконечности функций,  $C_K(\mathbb{R})$  — подмножество  $C_0(\mathbb{R})$  функций с компактным носителем,  $C^\infty(\mathbb{R})$  — пространство бесконечно дифференцируемых функций.

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в работе [90, гл. 5], в которой предложено двухпараметрическое  $(k, a)$ -обобщенное унитарное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x), \quad (10)$$

в котором ядро

$$B_{k,a}(x, y) = b_{k,a}(xy) = j_\lambda\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)} \frac{xy}{(ai)^{2/a}} j_{\lambda+\frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right). \quad (11)$$

Преобразование Данкля получается при  $a = 2$ .

В отличие от преобразования Данкля у  $(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье при  $a \neq 2$  появляются деформационные свойства. Например,  $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда  $a = 2$ . Более точно, множество  $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ , если только  $a$  четное. Оно состоит из быстро убывающих на бесконечности функций, если только  $a = 2/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $a$  — иррациональное, то для любой нетривиальной  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}_{k,a}(f) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$  [91].

Учитывая важность в гармоническом анализе наличия у унитарного преобразования инвариантного класса функций, быстро убывающих на бесконечности, возникает

вопрос о существовании такого класса  $y(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье. Мы даем положительный ответ на поставленный вопрос.

Пусть для  $a > 0$

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2}): F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 - \text{четные}\}, \quad (12)$$

$$\delta_{k,a}f(x) = |x|^{2-a}\Delta_k f(x), \quad (13)$$

где  $\Delta_k$  — лапласиан Данкля [89, гл. 2, 2.2].

Мы показываем, что класс  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$  инвариантен для преобразования Фурье  $\mathcal{F}_{k,a}$  и дифференциально-разностного оператора  $\delta_{k,a}$ . Равенство  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  справедливо только при  $a = 2$ . Класс  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$  впервые появился в [91], где показано, что при  $a = 2/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , справедливо вложение  $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ . Отметим также, что класс  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$  плотен в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  при  $p < \infty$  и пространстве  $C_0(\mathbb{R})$ .

Последовательность  $a_n = 2/n$  разбивается на две последовательности  $a_r = 2/(2r+1)$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , и  $a_r = 1/r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , которым соответствуют две последовательности обобщенных преобразований Фурье. Первой последовательности при  $r = 0$  принадлежит преобразование Данкля. Остальные преобразования этой последовательности после некоторой замены переменной также становятся недеформированными унитарными преобразованиями с ядрами, являющимися целыми функциями экспоненциального типа (см. [91]). Замена переменной для второй последовательности может привести к недеформированным унитарным операторам с ядрами только конечной гладкости, то есть эти две последовательности преобразований различаются. В работе изучается  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье и основное внимание уделяется второму случаю  $a = 1/r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Случай  $a = 1$  был известен до появления общего преобразования Фурье. Например, при  $a = 1$  и  $k = 0$  обобщенное преобразование Фурье является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы  $O(N+1, 2)$  [92].

Устанавливаются некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье и, в частности, доказывается инвариантность класса  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ . В последующих секциях  $a = 1/r$ . В секции 2 изучаются два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z), \quad (14)$$

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda\left(\frac{2}{a}|yz|^{a/2}\right) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Оператор  $\tau^y$  определен в [93]. В [94] для него получено интегральное представление и доказана  $L^p$ -ограниченность при  $1 \leq p \leq \infty$ . В [95, 96] предложено другое интегральное представление. Оператор  $T^y$  ранее был известен для преобразования Данкля (см. [97, гл. 3]). В отличие от оператора  $\tau^y$  он может быть положительным. Для операторов  $\tau^y$ ,  $T^y$  дается простая форма записи, из которой легко получается  $L^p$ -ограниченность в большей области параметров. Исследуются условия положительности оператора  $T^y$ . Операторы обобщенного сдвига являются важной составляющей гармонического анализа в пространствах с весом. Они необходимы для определения модулей гладкости функций и с их помощью определяются важные интегральные операторы, в частности, потенциал и преобразование Рисса. Определяются две свертки и для них доказывается теорема Юнга. Как пример их применения в определяются обобщенные средние и исследуется их  $L^p$ -сходимость.

Мы будем писать  $A \lesssim B$ , если выполнено неравенство  $A \leq cB$  с константой  $c > 0$ , зависящей только от несущественных параметров. Для функции  $f$  на прямой  $f_e$  — ее четная, а  $f_o$  — нечетная части.

#### **Глава 5 Дискретное преобразование Фурье на параллелепипедальных сетках**

В главе доказывается сведение многомерной Фурье интерполяции к одномерной на параллелепипедальных сетках Н.М. Коробова

#### **Глава 6 Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн**

В главе рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что однородное изотропное упругое полупространство покрыто непрерывно-неоднородным плоским слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе решения аналогичной задачи в случае падения плоской волны.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по плоским волнам. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению для давления в плоской падающей волне. Поэтому давление в рассеянной волне в случае падения сферической волны на полупространство с неоднородным жидким слоем записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению для давления в рассеянной волне при падении плоской волны. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, приближенное аналитическое решение которой получено методом степенных рядов.

Также в главе рассматривается дифракция звуковых волн неоднородной изотропной цилиндрической оболочкой конечной длины произвольной толщины. Полагается, что в полости цилиндрической оболочки — вакуум. Плотность и модули упругости материала оболочки описываются непрерывными функциями радиальной координаты. Первичное поле возмущений представляет собой плоскую гармоническую звуковую волну, наклонно падающую на тело.

Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Показано, что использование квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам Коробова позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом последовательного интегрирования по квадратурной формуле трапеций. Проведено сопоставление времени вычисления потенциала поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой, двумя методами вычисления интегралов.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала оболочки на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Также в главе рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости.

Полагается, что скорость набегающего потока значительно меньше скорости звука. Часть поверхности сфероида совершает гармонические колебания, а остальная часть является абсолютно жесткой.

Задача решается в вытянутой сфероидальной системе координат. Получено приближенное аналитическое решение задачи, построенное с использованием потенциала скорости набегающего на тело потока и потенциала скорости акустического поля неподвижного излучателя.

Представлены результаты численных расчетов полярных диаграмм распределения акустического давления на поверхности сфероида при разных значениях отношения скорости потока к скорости звука и различной конфигурации сфероида

Также в главе 6 рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что цилиндр с однородным покрытием окружен непрерывно-неоднородным слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Волновые процессы в упругом слое описываются системой уравнений линейной теории упругости изотропного тела. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Также в главе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи границы полупространств в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства, и не является параллельным оси цилиндра. Полагается, что цилиндр находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью, граничащем с однородным упругим полупространством.

Для представления рассеянного поля в идеальной жидкости используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Колебания неоднородного изотропного упругого тела описываются уравнениями линейной теории упругости. Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в заданном частотном диапазоне. Построен функционал, выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот. Построенный функционал записывается в виде двойного интеграла, оценить который аналитически не представляется возможным. Полученный интеграл рассчитан численно по квадратурной формуле на основе параллелепipedальной сетки Коробова.

Представлены численные расчеты угловых характеристик рассеянного поля. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных покрытий на дифракционную картину рассеянного поля.

Также в главе рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой абсолютно жесткий цилиндр, покрытый радиально-неоднородным изотропным упругим слоем. Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, движущейся вдоль образующей цилиндра с постоянной дозвуковой скоростью.

Получено аналитическое решение задачи.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне при разных законах неоднородности покрытия и значениях числа Маха.

### **Глава 7 Решение задачи дифракции плоской звуковой волны методом граничных элементов**

Рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в виде жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, которая аппроксимируется полигональной сеткой. Модель процесса строится на базе уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Для решения задачи сравниваются два численно-аналитических подхода, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). В первом подходе препятствие заключается в сферу, область внутри которой с учетом поверхности препятствия разбивается на пространственные (3D) конечные элементы. В этой области задача решается МКЭ, что дает значения потенциала на сфере, которые используются для нахождения коэффициентов сферического разложения потенциала рассеянной волны. Во втором подходе при помощи пространственной функции Грина для уравнения Гельмгольца задача сводится к системе интегральных уравнений по поверхности препятствия. Также применяется метод Бертона и Миллера для исключения неединственности решения и регуляризация сингулярных интегралов на основе тождеств для статической функции Грина. В МГЭ достаточно использовать разбиение поверхности на граничные (2D) элементы. Приводятся основные соотношения для применения численных методов и результаты решения задачи рассеяния звука на примере жидкого тела, имеющего форму объединения двух шаров одинакового радиуса. Установлено, что для достижения приемлемой точности расчета рассеянного поля метод МГЭ требует существенно меньших вычислительных затрат по сравнению с МКЭ.

**В рамках выполнения исследований в 2022 году опубликованы следующие статьи:**

1. Ю. А. Басалов. О критических решетках единичного шара // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 20–37.
2. Ю. А. Басалов, Программная реализация квадратурных формул по параллелепипедальным сеткам в 2-хмерном случае // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Т. 1, С. 11–17.
3. А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 38 – 44.
4. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва. Актуальные задачи теоретико-числового метода в приближенном анализе // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Т. 1, С. 11–24.
5. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников. О рассеянии звука упругим сфероидом // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Т. 1, С. 32–36.
6. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Т. 1, С. 37–41.
8. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков. Тульская школа теории чисел // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Т. 1, С. 25–37.

9. А. В. Родионов. Метод Рунге решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением теоретико-числовых сеток // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 117–129.

10. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

11. Классические теоретико-числовые сетки и методы интерполяции и аппроксимации функций многих переменных и их приложения в механике: моногр. : в 3 ч. / Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, В. И. Иванов, Л. А. Толоконников, С. А. Скобельцин, И. Ю. Реброва, Ю. А. Басалов / под ред. Н. М. Добровольского. – Электрон. дан. – Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022. – Ч. 2.

12. Теория чисел: учеб. пособие [Электронный ресурс] / В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. – Электрон. дан. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2022.

**В рамках выполнения исследований в 2023 году опубликованы следующие статьи:**

1. В. И. Иванов, “Одномерное  $(k, a)$ -обобщенное преобразование Фурье”, Тр. ИММ УрО РАН, 29, № 4, 2023, 92–108

2. В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 5–25.

3. А. В. Родионов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 3, С. 95–121.

4. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II // Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 4, С. 311–324.

5. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 217–221.

6. А. В. Родионов. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 222–227.

7. Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 274–288.

8. Л. А. Толоконников. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 320–330.

**Опубликованы тезисы и материалы конференций в 2023 году:**

1. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье // Сборник трудов XVI Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Россия, Казань, КФУ, 22-27 августа 2023). Казань: КФУ, 2023. Т. 66. С. 54-56.

2. Родионов, А. В. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток / А. В. Родионов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня

рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 273-277. – EDN VEPNGV.

3. Крылов, А. П. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток / А. П. Крылов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 267-269. – EDN IYKPBW.

4. Басалов, Ю. А. Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении / Ю. А. Басалов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 251-253. – EDN POCRNV.

5. Иванов, В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой / В. И. Иванов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 256-262. – EDN UMHNQ.

6. Подолян, А. С. Численное решение линейных интегральных уравнений / А. С. Подолян // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 269-273. – EDN XRAWAM.

**В рамках выполнения исследований в 2024 году опубликованы следующие статьи:**

1. Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 205–214.

2. Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 269–285.

3. Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим



покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 286–295.

4. Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.2, с. 350–358.

5. Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.3, с. 408–418.

6. Ю. А. Басалов, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, “Многомерная фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье”, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 517 (2024), 41–43.

7. Basalov, Yu. A. Multidimensional Fourier Interpolation and Fast Fourier Transforms / Yu. A. Basalov, N. N. Dobrovolsky, V. N. Chubarikov // Doklady Mathematics. – 2024. – DOI 10.1134/s1064562424702065. – EDN UKMVXJ.

8. Ефимов Д.Ю. Рассеяние акустических волн неоднородной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины в полупространстве // Прикладная математика и механика. 2024. Т. 88. Вып. 2. С. 299-312. DOI: 10.31857/S0032823524020096

9. Басалов, Ю.А., Быковский, В.А., Добровольский, Н.Н., Чубариков, В.Н., Добровольский, Н.М. Многомерная Фурье-интерполяция и трудоемкость быстрого преобразования Фурье // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 42–52.

10. Добровольский, Н.Н., Добровольский, Н.М. О приведённых алгебраических иррациональностях // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 138–146.

11. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Скрытые границы устойчивости одной системы с монотонной нелинейностью в гурвицевом секторе // Proceedings of the 8th International School-Seminar on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2024). Irkutsk, Russia, June 24–28, 2024. Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2024, С. 42-43.

12. Ефимов, Д. Ю. Исследование акустического поля, рассеянного конечной неоднородной упругой цилиндрической оболочкой, расположенной вблизи плоской поверхности, с использованием теоретико-числовых методов / Д. Ю. Ефимов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью "Вэлборн Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1068-1074. – EDN PEDPEI.

**В рамках выполнения исследований в 2024 году результаты представлены в принятых к печати статьях:**

1. Горбачев Д. В., Лепетков Д. Р. Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы

2. Ефимов Д. Ю. Неосесимметричная задача рассеяния цилиндрических акустических волн произвольной моды неоднородным упругим цилиндрическим слоем

3. Добровольский Н. М. О числе точек неполной решетки в прямоугольных областях

4. Крылов А. П. О гиперболической дзета-функции двумерных диагональных уни-модулярных решёток

5. Подолян А. С., Рарова Е. М. О теоретико-числовых методах решения интегральных уравнений Фредгольма II рода

6. Родионов А. В. Об алгоритме построения обобщённой параллелепipedальной сетки

7. Горбачев Д. В., Лепетков Д. Р. Приближенное решение методом коллокаций задачи рассеяния звуковой волны составным жидким телом произвольной формы

8. Басалов Ю. А. Программная реализация преобразования Фурье по параллелепipedальным сеткам в 2-мерном случае

**В рамках выполнения исследований в 2024 году опубликованы монографии:**

1. Добровольский, Н. Н. Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы : моногр. / Н. Н. Добровольский; под ред. В. Н. Чубариков. Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2024, 366 с.

**Исполнители проекта выступили с докладами на международных и всероссийских конференциях:**

II Всероссийская научно-практическая конференция “Математика в современном мире”, посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве (19–23 сентября 2023 г., Вологодский государственный университет, ул. С. Орлова, 6, г. Вологда)

Добровольский Н. Н. «Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» секционный доклад 20 сентября

<https://www.mathnet.ru/conf2288>

Третья конференция Математических центров России 10 – 15 октября 2023 г. на базе РНОМЦ «Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета», г. Майкоп, Республика Адыгея.

Добровольский Н.Н. «О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях» секционный доклад 14 октября

<https://mc-conf.adygnet.ru/>

XVI Международная Казанская школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” Сборник трудов (Казань, 22 – 27 августа 2023 г.)

Кузнецова О. И. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье. Секционный доклад 25 августа.

<https://mathcenter.kpfu.ru/functiontheory>

XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» [Тула, 26-29 сентября 2023 г.]

Родионов А. В. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепipedальных сеток. Секционный доклад 28 сентября

Крылов А. П., Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток. секционный доклад 28 сентября

Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н. Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении. Секционный доклад 28 сентября

Иванов В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой. Секионный доклад 28 сентября

Подолян А. С. Численное решение линейных интегральных уравнений. Секционный доклад 28 сентября

<http://poivs.tsput.ru/conf/international/XXII/ru>

IV Конференция математических центров России [Санкт-Петербург, 6-11 августа 2024 г.]

Добровольский Н.Н. О минимальных многочленах остаточных дробей алгебраических иррациональностей. Секционный доклад 11 августа.

Современные проблемы теории чисел [Сириус, 8-12 июля 2024 г.]

Добровольский Н.Н. Multidimensional number theoretic Fourier interpolation and fast Fourier transforms. Доклад 10 июля.

XXIII Международная научная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» посвященная 80-летию профессора А. И. Галочкина и 75-летию профессора В. Г. Чирского [г. Тула 29-31 октября 2024 г.]

Добровольский Н.Н. О теоретико-числовом методе Н.М. Коробова. Пленарный доклад 30 октября.

**Сотрудниками до 39 лет защищены диссертации:**

Кузнецовой О. И. в диссертационном совете 24.2.417.02 Тульского государственного университета представлена к защите диссертация на тему "Конструирование экстремально мультистабильных хаотических систем и их использование для преобразования информации" на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ". Диссертация успешно защищена 27.03.2024 г. Информацию по диссертации смотрите на сайте диссертационного совета:

<https://tulsu.ru/science/dissertation/diss-24-2-417-02/kuznetsova-oi-24-2-417-02>

Добровольским Н. Н. в диссертационном совете МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова представлена к защите диссертация на тему "Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы" на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 "Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика". Диссертация успешно защищена 29.03.2024 г. Информацию по диссертации смотрите на сайте диссертационного совета:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2840>

**В рамках выполнения проекта разработано прикладное программное обеспечение:**

Басалов Ю. А. Библиотека реализующая интегрирование с помощью параллелепипедальных сеток. Год создания 2023. Год выпуска 2023. Страна (страны) выпуска RU, Библиотека реализует интегрирование с помощью параллелепипедальных сеток на языке C# и опубликована в пакетном менеджере Nuget <https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Integration>.

Басалов Ю. А. Добровольский Н. Н. Библиотека реализующая интерполирование с помощью параллелепипедальных сеток. Год создания 2024. Год выпуска 2024. Страна (страны) выпуска RU, Библиотека реализует интерполирование с помощью параллелепипедальных сеток на языке C# и опубликована в пакетном менеджере Nuget <https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Interpolation>.

# Глава 1

## Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепипедальные сетки

### 1.1. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки  $\mathbb{Z}^2$ :  $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1 m_1, d_2 m_2) | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ ,  $(d_1, d_2 > 0)$ .

Диагональная унимодулярная решётка  $\Lambda(d) = \Lambda(d, \frac{1}{d})$ ,  $d > 0$ . Она имеет простой базис  $\vec{\lambda}_1 = (d, 0)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (0, \frac{1}{d})$  и базисную матрицу  $M(d)$  вида

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка  $\Lambda^*(d) = \Lambda(\frac{1}{d}, d)$  имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что всегда в этой работе  $d \geq 1$ , так как взаимная решётка будет симметричной к ней диагональная решётка с параметром  $\frac{1}{d} \leq 1$ .

В работе [8] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [7], стр.165).

**ЛЕММА 1.** Пусть  $d_1 \geq d_2$ , тогда  $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leq \ln\left(2\frac{d_1}{d_2} - 1\right)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [8].  $\square$

**ЛЕММА 2.** Пусть  $d_1 \geq d_2$ ,  $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$  и  $\|A - E_2\| \leq \delta < 1$ , тогда  $d_1 - d_2 = d_2 \delta_1$ , где  $0 \leq \delta_1 \leq \frac{\delta}{2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8].  $\square$

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки  $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$  имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{dm^\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{d}m^\alpha} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4}{dm^\alpha \cdot \frac{1}{d}n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Нетрудно видеть, что  $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{d}\right)|\alpha\right)$ .

Пользуясь тем, что  $d \geq 1$ , и вводя обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{d}m\right)^\alpha}\right) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d^\alpha}{m^\alpha}\right),$$

получим

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\zeta(\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4\zeta^2(\alpha) + 4\zeta(\alpha)f(d|\alpha). \quad (1.1)$$

## 1.2. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки  $\alpha = 1$ , где у неё полюс второго порядка.

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \text{ — множитель Римана, } \alpha = \sigma + it, \sigma < 0.$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма функция Эйлера.

**ЛЕММА 3.** *Для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4(M(\alpha)\zeta(1-\alpha))^2 + \\ + 4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)f(d|\alpha) \end{aligned}$$

при  $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, функция  $f(d|\alpha)$  является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому, подставляя в выражение для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки функциональное уравнение для дзета-функции Римана, получим утверждение леммы.  $\square$

ТЕОРЕМА 2. Для любой диагональной унимодулярной решётки  $\Lambda(d)$  ( $d \geq 1$ ) гиперболическая дзета-функция  $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$  является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки  $\alpha = 1$ , в которой у неё полюс второго порядка с вычетом

$$Res_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left( \frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left( 1 - \frac{d}{m} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, дзета-функция Римана мероморфна с единственным полюсом первого порядка при  $\alpha = 1$  и раскладывается в ряд Лорана в точке  $\alpha = 1$

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n,$$

где

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left( \sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} \right) - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

— константы Стильеса, а  $\gamma_0 = \gamma$  — константа Эйлера.

Таким образом, для дзета-функции Римана справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \gamma + r(\alpha),$$

где

$$r(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n = (\alpha - 1)r_1(\alpha), \quad r_1(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^{n-1}$$

и функции  $r(\alpha)$  и  $r_1(\alpha)$  — голоморфные функции на всей комплексной области.

Отсюда следует, что

$$\zeta^2(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2\gamma}{\alpha - 1} + 2r_1(\alpha) + (\gamma + r(\alpha))^2, \quad Res_1 \zeta^2(\alpha) = 2\gamma.$$

Так как все функции, стоящие в правой части равенства (1.1) являются либо голоморфными, либо мероморфными кроме точки  $\alpha = 1$ , то и левая часть является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости кроме точки  $\alpha = 1$ , в которой у неё полюс второго порядка. Для вычета в этой точке имеем равенство

$$Res_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left( \frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left( 1 - \frac{d}{m} \right)$$

и теорема полностью доказана.  $\square$

ТЕОРЕМА 3. На метрическом пространстве двумерных диагональных унимодулярных решёток гиперболическая дзета-функция  $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$  и её вычет в точке  $\alpha = 1$  являются непрерывными функциями, как функции от параметра  $d$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda(\frac{1}{d})|\alpha)$ , то при  $0 < d < 1$  необходимо положить  $f(d|\alpha) = f(\frac{1}{d}|\alpha)$ , тогда равенство (1.1) будет справедливо для любого  $d > 0$ .

Все функции, стоящие в правой части равенства (1.1) являются непрерывными функциями от  $d$  при  $d > 0$ , поэтому и левая часть будет непрерывной функцией от  $d$ .

Аналогично, имеем

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left( \frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4f(d|1),$$

поэтому вычет в точке  $\alpha = 1$  является непрерывной функцией от  $d$ .

Так как метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток гомеоморфно пространству  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ , то теорема полностью доказана.  $\square$

### 1.3. Обобщённые параллелепипедальные сетки

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть в вещественном арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^s$  задана линейно независимая система векторов  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ . Совокупность  $\Lambda$  всех векторов вида

$$n_1 \vec{a}_1 + \dots + n_s \vec{a}_s,$$

где  $n_j$  независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в  $\mathbb{R}^s$ , а сами векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$  — базисом этой решетки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Взаимной решеткой к решетке  $\Lambda$  называется множество  $\Lambda^*$ , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z} \}. \quad (1.2)$$

Если  $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js})$  ( $1 \leq j \leq s$ ) — произвольный базис решетки  $\Lambda$ , то взаимную решетку  $\Lambda^*$  можно задать взаимным базисом  $\vec{a}_j^* = (a_{j1}^*, a_{j2}^*, \dots, a_{js}^*)$  ( $1 \leq j \leq s$ ), который определяется равенством

$$(\vec{a}_j, \vec{a}_i^*) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (1 \leq j, i \leq s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что  $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$ .

Символом  $G_s$  будем обозначать полуоткрытый единичный  $s$ -мерный куб  $G_s = [0; 1)^s$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Для произвольной решетки  $\Lambda$  обобщенной параллелепипедальной сеткой  $M(\Lambda)$  называется пересечение взаимной решетки к решетке  $\Lambda$  с единичным  $s$ -мерным кубом  $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$ .

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

В дальнейшем в статье будут рассматриваться только целочисленные решётки и соответствующие им рациональные сетки.

Пусть базис целочисленной решетки  $\Lambda$  задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где  $a_{\nu\mu}$  — целые числа ( $\nu, \mu = 1, \dots, s$ ). Тогда базис взаимной решетки  $\Lambda^*$  задается матрицей

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix},$$

где  $b_{\nu\mu} = \frac{A_{\nu\mu}}{\det \Lambda}$ , а величина  $A_{\nu\mu}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $a_{\nu\mu}$  в матрице  $A$ .

Отметим, что базису  $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ) решетки  $\Lambda$  взаимным базисом  $\vec{\lambda}_\nu^*$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ) взаимной решетки  $\Lambda^*$  будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left( \frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки  $M(\Lambda)$  следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \quad (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}. \quad (1.3)$$

Из определения обобщённой параллелепипедальной сетки легко увидеть, что она состоит из  $\det \Lambda$  узлов.

Равенство (1.3) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку  $M(\Lambda)$ . Вопросу построения такой сетки посвящён следующий раздел.

## 1.4. Приведение базиса решётки к треугольному виду

Как было сказано выше, обобщённая параллелепипедальная сетка с рациональными узлами представляет собой пересечение решётки, взаимной к целочисленной, с  $s$ -мерным единичным кубом. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде  $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \dots, b_{\nu \nu}, 0, \dots, 0)$ .

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию  $0 \leq a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$  ( $1 \leq \mu < \nu \leq s$ ).

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [11].

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории цепных дробей.

Пусть  $p$  и  $q$  — произвольные натуральные числа. Тогда дробь  $\frac{p}{q}$  можно представить в виде конечной цепной дроби

$$\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \dots, a_n) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}.$$



Отрезки этой дроби  $\frac{p_k}{q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$  ( $k \leq n$ ) называются подходящими дробями к данному числу  $\frac{p}{q}$ . Понятно, что  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ .

Сформулируем некоторые свойства подходящих дробей.

1. Для всех  $0 \leq k \leq n$  подходящая дробь  $\frac{p_k}{q_k}$  — несократима.
2. Для всех  $0 \leq k \leq n$  выполнено равенство  $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$ .

**ЛЕММА 4.** Пусть  $\vec{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is})$  и  $\vec{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{js})$  — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки  $\Lambda$ , при чём для некоторого  $t$  ( $1 \leq t \leq s$ ) числа  $a_{it}$  и  $a_{jt}$  — натуральные. Пусть, также, дроби  $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$  — подходящие дроби к числу  $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$ .

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_j$  соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

- 1)  $b_t = 0$ ;
- 2)  $c_t = (a_{it}, a_{jt})$ , где  $(a_{it}, b_{it})$  — наибольший общий делитель чисел  $a_{it}$  и  $a_{jt}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое свойство следует из равенства  $\frac{a_t}{a_t} = \frac{p_n}{q_n}$ .

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь  $\frac{p_n}{q_n}$  несократима. Тогда  $a_t = (a_t, b_t) \cdot p_n$ ,  $b_t = (a_t, b_t) \cdot q_n$ . Получим

$$c_t = (-1)^{n+1} ((a_t, b_t) \cdot q_{n-1} p_n - (a_t, b_t) \cdot p_{n-1} q_n) = (a_t, b_t).$$

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если  $A$  — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -q_n & \dots & p_n & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & (-1)^{n+1} q_{n-1} & \dots & (-1)^n p_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице  $B$  элементы  $b_{ii} = -q_n$ ,  $b_{ij} = p_n$ ,  $b_{ji} = (-1)^{n+1} q_{n-1}$ ,  $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$ ; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя  $|\det B| = |(-1)^{n+1} (q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})| = 1$ , из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица  $B \cdot A$  является базисной для данной решётки.  $\square$

Теперь опишем алгоритм приведения базиса решётки  $\Lambda$  к нижнему треугольному виду.

**Шаг 1.** Запишем базисную матрицу решётки  $\Lambda$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем  $i = s$ .

*Шаг 2.* Каждую строку матрицы с первой по  $i$ -тую, для которой  $a_{ji} < 0$  ( $1 \leq j \leq i$ ) заменим на противоположную. Если  $a_{ii} = 0$ , то поменяем местами  $i$ -тую строку с произвольной  $j$ -той строкой ( $1 \leq j \leq i$ ), в которой  $a_{ji} \neq 0$ .

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки  $\Lambda$ . Существование такой строки, в которой  $a_{ji} \neq 0$  следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки  $\Lambda$ , в которой все элементы  $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ii}$  неотрицательны, при этом  $a_{ii} \neq 0$ .

*Шаг 3.* Для строки с номером  $j = 1$  выполним следующую операцию. Если  $a_{ji} \neq 0$ , заменим первую строку матрицы на строку  $-q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j$ , а  $i$ -тую строку на  $(-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j)$ . Здесь  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_j$  —  $i$ -тая и  $j$ -тая строки матрицы соответственно,  $p_{n-1}, p_n$  — числители,  $q_{n-1}, q_n$  — знаменатели подходящих дробей к дроби  $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$  ( $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ ).

Повторим шаг 3 для значений  $j: 2 \leq j \leq i - 1$ .

Согласно лемме 4 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой  $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{i-1i} = 0$ ,  $a_{ii} > 0$ .

Повторим шаги 2–3 для  $i = s-1, \dots, \dots, 1$ . В результате получим базисную матрицу решётки  $\Lambda$ , приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

## 1.5. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки  $\Lambda$  имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (1.4)$$

Её детерминант равен  $\det \Lambda = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss}$ .

В этом случае базисная матрица взаимной решётки  $\Lambda^*$  будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где

- при  $i > j$   $b_{ij} = 0$ ;
- при  $i = j$   $b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ ;
- при  $i < j$   $b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} a_{jk}$ .

Её детерминант равен  $\det \Lambda^* = \frac{1}{\det \Lambda}$ .

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть базисная матрица целочисленной решётки  $\Lambda$  задана равенством (1.4), а базисная матрица взаимной решётки  $\Lambda^*$  — равенством (1.5). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка  $M(\Lambda)$  имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \right\} \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}, \quad (1.6)$$

где  $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$  — дробная часть вектора  $\vec{x}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Символом  $M$  обозначим конечное подмножество векторов решётки  $\Lambda^*$

$$M = \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}. \quad (1.7)$$

Поскольку  $k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s$ , то мощность  $|M| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss} = |M(\Lambda)|$ .

Покажем теперь, что разность любых двух различных векторов из множества  $M$  вида  $\vec{x}_1 = k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s$  и  $\vec{x}_2 = m_1 \vec{b}_1 + \dots + m_s \vec{b}_s$  не является целым вектором.

Так как векторы  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$  различны, то найдётся такое значение  $t$ , что  $k_t \neq m_t$ . Будем считать, что  $k_t > m_t$ , и  $t$  — наименьшее среди таких значений, то есть  $k_i = m_i$ , при  $i < t$ .

Рассмотрим  $t$ -тую компоненту разности  $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$y_t = (k_1 - m_1)b_{1t} + \dots + (k_{t-1} - m_{t-1})b_{(t-1)t} + (k_t - m_t)b_{tt} + (k_{t+1} - m_{t+1})b_{(t+1)t} + \dots + (k_s - m_s)b_{st}.$$

В ней  $k_1 - m_1 = \dots = k_{t-1} - m_{t-1} = 0$ , так как значение  $t$  выбрано минимальным, для которого  $k_t \neq m_t$ . С другой стороны,  $b_{(t+1)t} = \dots = b_{st} = 0$ , так как базисная матрица решётки  $\Lambda^*$  имеет верхний треугольный вид.

Таким образом, получаем

$$y_t = (k_t - m_t)b_{tt}.$$

Поскольку

$$0 \leq m_t < k_t < a_{tt},$$

то

$$0 < k_t - m_t < a_{tt}.$$

Из данных неравенств и равенства

$$b_{tt} = \frac{1}{a_{tt}}$$

имеем

$$0 < y_t = (k_t - m_t)b_{tt} < a_{tt}b_{tt} = 1.$$

Из сказанного следует, что разность любых двух векторов из множества  $M$  имеет хотя бы одну нецелую компоненту  $y_t$ , а значит дробные части этих векторов различны, что и доказывает утверждение теоремы.  $\square$

## Глава 2

# Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполяция.

### 2.1. Квазипорядок на $\mathbb{R}^s$ и множества Быковского

Рассмотрим на  $\mathbb{R}^s$  квазипорядок  $\vec{x} \leq \vec{y}$ , заданный выполнением  $s$  соотношений  $|x_\nu| \leq |y_\nu|$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ). Ясно, что отношение

$$\theta = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^s, \vec{x} \leq \vec{y} \& \vec{y} \leq \vec{x}\}$$

является отношением эквивалентности и фактормножество  $\mathbb{R}^s/\theta$  будет частично упорядоченным множеством изоморфным  $\mathbb{R}_+^s$ , где  $\mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$  — множество всех неотрицательных вещественных чисел (См. [33], стр. 37).

Будем через  $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$ , где для вещественных  $x$  полагаем  $\bar{x} = \max(1, |x|)$ , обозначать усеченную норму  $\vec{x}$ . Ясно, что из  $\vec{x} \leq \vec{y}$  следует  $q(\vec{x}) \leq q(\vec{y})$ .

Так как решётка  $\Lambda(\vec{a}, N)$  решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \quad (2.1)$$

является подмножеством  $\mathbb{R}^s$ , то на ней задается индуцированный квазипорядок. Можно рассмотреть отношение эквивалентности  $\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$ , которое задается равенством

$$\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)} = \{(\vec{x}, \vec{y}) | \vec{x}, \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), \vec{x} \leq \vec{y} \& \vec{y} \leq \vec{x}\},$$

но фактормножество  $\Lambda(\vec{a}, N)/\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$  в случае произвольной решётке решений линейного сравнения непросто описать. Для удобства два решения  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$ , принадлежащих  $\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$ , будем называть ассоциированными и писать  $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$ . Если из  $\vec{0} < \vec{m}_1 \leq \vec{m}_2$  следует  $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$ , то  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  называются минимальными относительно квазипорядка.

Для простоты изложения мы будем предполагать, что все коэффициенты  $a_\nu$  взаимно просты с модулем  $N$ :  $(a_\nu, N) = 1$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ). Именно этот случай наиболее важен для метода оптимальных коэффициентов, так как это соглашение входит в определение параллелепипедальных сеток Коробова.

В работе [15] В. А. Быковский ввёл понятие минимального решения сравнения (2.1). Ненулевое решение называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения  $(m'_1, \dots, m'_s)$ , для которого

$$|m'_1| \leq |m_1|, \dots, |m'_s| \leq |m_s|; \quad |m'_1| + \dots + |m'_s| < |m_1| + \dots + |m_s|.$$

Другими словами, ненулевое решение  $\vec{m}$  называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения  $\vec{m}'$  такого, что  $\vec{m}' < \vec{m}$ . Таким образом, относительно квази порядка на решётке  $\Lambda(\vec{a}, N)$  минимальное решение  $\vec{m}$  является просто минимальным элементом решётки.

Отметим, что в работе [16] было введено другое понятие — локальный минимум второго рода, так как это требовалось для обобщения результатов В. А. Быковского на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Будем множество всех минимальных решений  $\vec{m}$  решётки  $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$  обозначать через  $B(\Lambda(\vec{a}, N))$  и называть минимальным множеством Быковского. Если  $\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$ , то и  $-\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$ .

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество  $B(\Lambda)$  конечно и не пусто, при этом  $\bar{x}_j < \det \Lambda$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Более того, можно утверждать, что  $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s < N$ .

Пусть  $\vec{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{sj})$  ( $1 \leq j \leq r$ ,  $r = r(\Lambda)$ ) есть все минимальные решения сравнения (2.1) из минимального множества  $B(\Lambda)$  решётки  $\Lambda$ . Так как для любого минимального решения  $\vec{x}$  точка  $-\vec{x}$  также является минимальным решением, то  $r(\Lambda)$  — чётное натуральное число. Через  $B^*(\Lambda)$  обозначим множество минимальных решений, где из каждой пары  $\vec{x}$  и  $-\vec{x}$  взято ровно одно. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \cup -B^*(\Lambda). \quad (2.2)$$

Если  $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$ , то  $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$ . Будем предполагать, что нумерация минимальных решений согласована с разбиением (2.2):  $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$  ( $j = 1, \dots, r^*$ ) и  $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$  ( $j = 1, \dots, r^*$ ). Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leq j \leq r} \bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}.$$

Введем для произвольного вектора  $\vec{x}$  понятие его индекса — количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через  $r(\vec{x})$ . Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора:  $r(\vec{0}) = 0$ , а максимальное значение индекса равно  $s$ .

Будем предполагать, что для выбранной нумерации выполнено дополнительное соглашение  $r(\vec{x}_1) \leq r(\vec{x}_2) \leq \dots \leq r(\vec{x}_{r^*})$ . Ясно, что  $r^* = r_1^* + \dots + r_s^*$ , где  $r_\nu^*$  — количество минимальных решений из  $B^*(\Lambda)$  с индексом  $\nu$ . Нетрудно видеть, что с единичным индексом имеется ровно  $s$  минимальных решений:  $\vec{x}_1 = (N, 0, \dots, 0), \dots, \vec{x}_s = (0, \dots, 0, N)$ .

Минимальные решения индекса 2 можно перечислить с помощью цепных дробей согласно результатам работы [23].

Обозначим через  $B_\nu^*(\Lambda)$  множество минимальных решений с индексом  $\nu$ . Ясно, что  $B^*(\Lambda) = \bigcup_{\nu=1}^s B_\nu^*(\Lambda)$ .

Аналогично, решётку решений  $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$  представим как объединение множеств точек индекса  $\nu$ :  $\Lambda = \{\vec{0}\} \cup (\bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu)$ , где  $\Lambda_\nu = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, r(\vec{x}) = \nu\}$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ).

Ясно, что справедливо представление для гиперболической дзета-функции решётки:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\nu=1}^s \sum_{\vec{x} \in \Lambda_\nu} \frac{1}{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^\alpha}.$$

Ещё Н. М. Коробов в 1959 году в работах [24, 25] установил, что остаточный ряд в гиперболической дзета-функции решётки решений  $\Lambda(\vec{a}, N)$ , в котором хотя бы одна компонента по модулю не меньше  $N$ , оценивается как  $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$ .

В соответствии с этим результатом Н. М. Коробова положим  $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^* \cup \Lambda_\nu^{**}$ , где  $\Lambda_\nu^* = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| < N\}$ ,  $\Lambda_\nu^{**} = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| \geq N\}$ . Кроме этого, положим  $\Lambda^* = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^*$ ,  $\Lambda^{**} = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^{**}$ .

Сделаем ещё несколько важных замечаний и обозначений.

Во-первых, для любого  $j > s$  и минимального решения  $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$  имеем  $\max_{1 \leq \nu \leq s} |x_{\nu j}| \leq \frac{N}{2}$ .

Во-вторых, будем говорить что вектора  $\vec{P}$  и  $\vec{x}$  подобны:  $\vec{P} \simeq \vec{x}$ , если  $r(\vec{P}) = r(\vec{x})$  и нулевые координаты у обоих векторов совпадают.

В-третьих, для любого  $\vec{P}$  с  $\max_{1 \leq j \leq s} |P_j| < N$  и индекса  $\nu$  через  $b(\vec{P})$  обозначим минимальное решение  $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$  такое, что  $\vec{P} \simeq \vec{x}_j$ ,  $\vec{x}_j \leq \vec{P}$  и величина  $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)}$  имеет минимальное значение. Отсюда следует, что  $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)} \leq \frac{q(\vec{P})}{q(\Lambda)}$ , так как для гиперболического параметра справедливо равенство  $q(\Lambda) = \min_{\vec{x}_j \in B^*} q(\vec{x}_j)$ .

## 2.2. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^s [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где  $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$ ,  $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$ . Очевидно, что  $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$ .

**ЛЕММА 5.** Для любых целых  $b$  и  $\lambda$  справедливо равенство

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [41].  $\square$

**ЛЕММА 6.** Справедливы неравенства

$$\frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} \leq \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leq \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, пользуясь леммой 5, получим

$$\begin{aligned} \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} &= \sum_{b=1}^{\infty} \left( \sum_{m_j=bN}^{bN+N-1} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} + \sum_{m_j=-(bN+N-1)}^{-bN} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \right), \\ \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} &= 2 \sum_{b=2}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} \leq \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leq 2 \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}. \end{aligned}$$

$\square$

Обозначим для целого вектора  $\vec{n}$  с индексом  $r(\vec{n}-\vec{1}) = \nu$  и целого вектора  $\vec{\lambda}+\vec{1} \simeq \vec{n}-\vec{1}$  через  $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$  число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) \cap \Lambda_\nu^*, \vec{m} \simeq \vec{n} - \vec{1}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ясно, что

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T_\nu(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \quad (2.4)$$

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu > 1$ ,  $b(\vec{n} - \vec{1}) = \vec{x}_j$  и  $n_\mu = 1$ ,  $\lambda_\mu = -1$  при  $x_{\mu j} = 0$ . Тогда справедлива оценка

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil, \quad (2.5)$$

где  $\lceil x \rceil$  — наименьшее целое число не меньшее вещественного числа  $x$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для любого вектора  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s)$  положим  $|\vec{x}| = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_s})$ . Определим величины  $k_\mu = \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil$  для  $|x_{\mu j}| > 0$ ,  $k_\mu = 1$  для  $x_{\mu j} = 0$ . Положим для  $\vec{l} = (l_1, \dots, l_s)$ , что  $\vec{l} \cdot \vec{x} = (l_1 x_1, \dots, l_s x_s)$ .

Покроем прямоугольный параллелепипед  $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n})$  объединением прямоугольных параллелепипедов вида  $\Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|)$ , где целые  $0 \leq l_1 \leq k_1 - 1, \dots, 0 \leq l_s \leq k_s - 1$ :

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) \subseteq \bigcup_{\vec{0} \leq \vec{l} \leq \vec{k} - \vec{1}} \Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|).$$

Отсюда следует, что

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \sum_{\vec{0} \leq \vec{l} \leq \vec{k} - \vec{1}} T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N). \quad (2.6)$$

Покажем, что  $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N) \leq 1$ . Допустим, что число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|) \cap \Lambda_\nu^*, \vec{m} \simeq |\vec{x}_j| - \vec{1} \end{cases} \quad (2.7)$$

больше 1. Тогда, согласно определению величины  $\delta_N(m)$ , числа  $a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda$  и  $a_1 m'_1 + \dots + a_s m'_s + \lambda$  будут кратны  $N$ . Но тогда и их разность также будет кратна  $N$ :

$$a_1(m_1 - m'_1) + \dots + a_s(m_s - m'_s) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Так как системы  $m_1, \dots, m_s$  и  $m'_1, \dots, m'_s$  различны, то система  $m_1 - m'_1, \dots, m_s - m'_s$  будет нетривиальным решением сравнения (2.1) и, следовательно,

$$|m_1 - m'_1| < \overline{x_{1j}}, \dots, |m_s - m'_s| < \overline{x_{sj}},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает что  $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N) \leq 1$ .

Пользуясь доказанным неравенством, получим

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq k_1 \dots k_s = \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu > 1$ , минимальное решение  $\vec{x}_j \simeq \vec{n} - \vec{1}$ ,  $\vec{x}_j \leq \vec{n}$  и  $n_\mu = 1$ ,  $\lambda_\mu = -1$  при  $x_{\mu j} = 0$ . Тогда справедлива оценка

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следствия дословно повторяет доказательство теоремы.  $\square$

## 2.3. Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова — Коробова — Быковского для произвольного модуля  $N$ . В соответствии с разбиением  $\Lambda \setminus \{\vec{0}\} = \Lambda^* \cup \Lambda^{**}$  получим:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) + \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha), \quad \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^*} \frac{1}{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^\alpha},$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^{**}} \frac{1}{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^\alpha}.$$

ЛЕММА 7. **Обобщённая лемма Коробова.** *Справедливы неравенства*

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geq \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left( 1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu, \quad (2.9)$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leq \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left( 1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения величины  $\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha)$  следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) &= \sum_{|m_1| \geq N} \sum_{m_2, \dots, m_s \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{s-2} \sum_{|m_1|, \dots, |m_\nu| < N} \sum_{|m_{\nu+1}| \geq N} \sum_{m_{\nu+2}, \dots, m_s \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} + \\ &+ \sum_{|m_1|, \dots, |m_{s-1}| < N} \sum_{|m_s| \geq N} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}. \end{aligned}$$



Воспользуемся леммой 6, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} \left( (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^\nu (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^{s-1} \right) \leq \\
& \leq \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leq \\
& \leq \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha} \left( (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^\nu (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^{s-1} \right).
\end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} = \zeta(\alpha) - \alpha \int_N^\infty \frac{[x] - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx, \\
& \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} = \alpha \int_N^\infty \frac{x - N}{x^{\alpha+1}} dx \leq \\
& \leq \alpha \int_N^\infty \frac{[x] - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx \leq \\
& \leq \alpha \int_N^\infty \frac{x - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha} = \\
& = \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha}, \\
& \zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \leq \zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) & \geq \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left( 1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu, \\
\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) & \leq \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left( 1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu.
\end{aligned}$$

□

Перейдём к изучению величины  $\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)$ , для которой справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\nu=2}^s \zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha),$$

так как  $\Lambda_1^* = \emptyset$ .

Пусть  $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$  — произвольное минимальное решение индекса  $\nu$ . Обозначим через  $\vec{P}(\vec{x}_j)$ , заданный равенствами  $P_\mu = 0$ , если  $x_{\mu j} = 0$ , и  $P_\mu = N - 1$ , если  $|x_{\mu j}| > 0$ . Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda_\nu^*} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 8. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) \leq \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^\nu \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию  $\varphi(m_1, \dots, m_s)$  равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{x}_j > \vec{m} \text{ или } \vec{m} > \vec{P}(\vec{x}_j), \\ \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s), & \text{если } \vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j). \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ & = \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{k} \leq \vec{m}} \delta_N(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s). \end{aligned}$$

Воспользуемся следствием для оценки внутренней суммы, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \\ & \leq \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j), m_1, \dots, m_s \geq 0} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) 2 \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil = \\ & = 2^\nu \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil. \end{aligned}$$

Для внутренней суммы имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil \leq \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left( \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} + 1 \right) = \\ & = \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left( \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \frac{m_\mu}{m_\mu^\alpha} - \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|+1}^N \frac{m_\mu - 1}{m_\mu^\alpha} \right) = \\ & = \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left( \frac{|x_{\mu j}|}{|x_{\mu j}|^\alpha} + \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|+1}^{N-1} \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{N-1}{N^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Далее заметим, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) &= \int_{x+1}^N \frac{1}{u^\alpha} du \leq \sum_{m=x+1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \leq \int_x^{N-1} \frac{1}{u^\alpha} du = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1} \left( \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha} \right) \left[ \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right] \leq \\ &\leq \frac{2}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left( \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{|x_{\mu j}|^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}} \right) - \frac{N-1}{N^\alpha} \right) \leq \\ &\leq \left( 2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}. \end{aligned}$$

Окончательно для  $\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha)$  имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \\ &\leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left( 2 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \right) \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} = \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left( 2 + \frac{1}{\alpha-1} \right), \\ &\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) \leq \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} \left( 2 + \frac{1}{\alpha-1} \right)^\nu. \end{aligned}$$

□

**ТЕОРЕМА 6.** *Гиперболическая дзета-функция решетки  $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$  удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) &< \sum_{\nu=2}^s \left( 2 + \frac{1}{\alpha-1} \right)^\nu \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} + \\ &+ \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left( 1 - \frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \right)^\nu. \end{aligned} \quad (2.12)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 7 и 8.

□

## 2.4. Обозначения и необходимые факты

В данном разделе приведены без доказательства необходимые факты из работ [50] и [2].

### 2.4.1. Из геометрии чисел

Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество  $M$  из  $G_s$ , где  $G_s = [0; 1)^s$  — полукрытый единичный  $s$ -мерный куб. Предварительно напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть  $\Lambda$  — произвольная целочисленная решетка в  $\mathbb{R}^s$ , т.е.  $\Lambda$  — подрешетка фундаментальной решетки  $\mathbb{Z}^s$ . Другими словами  $\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \dots + m_s\vec{\lambda}_s \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$  и  $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$  — линейно независимая система целочисленных векторов. С алгебраической точки зрения все решетки как бесконечные абелевы группы с  $s$  образующими изоморфны  $\mathbb{Z}^s$ .

Параллелепипед  $\Pi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \{\alpha_1\vec{\lambda}_1 + \dots + \alpha_s\vec{\lambda}_s \mid 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s < 1\}$  — фундаментальный параллелепипед решетки, объем которого обозначается через  $\det \Lambda$ , называется детерминантом, или определителем, решетки и является ее инвариантом, не зависящим от выбора базиса решетки.

Усеченной нормой называется величина  $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$ , где для вещественного  $x$  обозначаем  $\bar{x} = \max(1, |x|)$ . Гиперболический параметр  $q(\Lambda)$  решетки  $\Lambda$  определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест  $K(T)$  не содержит ненулевых точек решетки  $\Lambda$  при  $T < q(\Lambda)$ .

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина  $T$  — его параметром.

Назовем  $r$ -й компонентой гиперболического креста  $K(T)$  подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left( \bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Для решетки  $\Lambda$  рассмотрим ее взаимную решетку  $\Lambda^*$ . По определению взаимная решетка  $\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$ . Отсюда следует, что для любой решетки  $\Lambda$  справедливы равенства  $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ ,  $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$ . Нетрудно видеть, что фундаментальная решетка  $\mathbb{Z}^s$  совпадает со своей взаимной решеткой и является подрешеткой взаимной решетки любой целочисленной решетки. Кроме того, если  $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^s$ , то  $\mathbb{Z}^s \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$ . Для любого  $C \neq 0$   $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** *Обобщенной параллелепипедальной сеткой  $M(\Lambda)$  называется множество  $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$ .*

Ясно, что если  $\Lambda_1 \subset \Lambda$ , то  $M(\Lambda) \subset M(\Lambda_1)$ .

Если  $M \subset \Lambda$  — подрешетка решетки  $\Lambda$ , то величина  $D = \det M / \det \Lambda$  называется индексом подрешетки  $M$  решетки  $\Lambda$ . Два вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  решетки  $\Lambda$  сравнимы по подрешетке  $M$  (находятся в одном классе относительно подрешетки  $M$ ), если  $\vec{x} - \vec{y} \in M$ .

В этом случае пишем  $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$ . Индекс  $D$  подрешётки  $M$  решётки  $\Lambda$  равен числу классов решётки  $\Lambda$  относительно  $M$ . Произвольное множество векторов решётки  $\Lambda$  по одному из каждого класса относительно решётки  $M$  называется полной системой вычетов решётки  $\Lambda$  относительно  $M$ . Каждая полная система вычетов решётки  $\Lambda$  относительно  $M$  имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной  $\Lambda/M$ .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  обобщенная параллелепипедальная сетка  $M(\Lambda)$  является полной системой вычетов взаимной решётки  $\Lambda^*$  относительно фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$ , т.е.  $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$ . Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно, полную систему вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$  будем обозначать через  $M^*(\Lambda)$ , хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора  $M^*(\Lambda)$ .

В одномерном случае любая целочисленная решётка имеет вид  $p\mathbb{Z}$  и множество чисел  $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$ ,  $p_1 = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ ,  $p_2 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$  является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}$  по подрешётке  $p\mathbb{Z}$ . Дадим многомерный аналог этому понятию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** *Полную систему вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$  назовем минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** *Полную систему вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$ , состоящую из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, назовем абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.*

Такую полную систему вычетов будем обозначать через  $M_H^*(\Lambda)$ . Вообще говоря, полная система вычетов  $M_H^*(\Lambda)$  определена неоднозначно. Это видно на примере решётки  $N\mathbb{Z}^s$  при четном  $N$ . Действительно,  $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$ . Уже в одномерном случае две полные системы вычетов  $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$  и  $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$  удовлетворяют определению 6. В  $s$ -мерном случае таких систем будет  $2^s$ . Для однозначности выбора  $M_H^*(\Lambda)$  можно еще ввести лексикографический линейный порядок на  $\mathbb{Z}^s$ . Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым  $M_H^*(\Lambda)$  будет определено однозначно.

**ЛЕММА 9.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  и подрешетки  $\Lambda_1$  справедливо вложение*

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (2.13)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

Из доказательства леммы 9 следует, что если  $M_H^*(\Lambda) = \{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_N\}$ , то для абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов  $M_H^*(\Lambda_1)$  справедливо

равенство

$$M_H^*(\Lambda_1) = \bigcup_{j=1}^N \{\vec{m}_j, \vec{m}_{j,1}, \dots, \vec{m}_{j,N_1-1}; \quad \vec{m}_j \equiv \vec{m}_{j,\nu} \pmod{\Lambda} \ (\nu = 1, \dots, N_1 - 1)\}, \quad (2.14)$$

где  $N_1 = \frac{\det \Lambda_1}{\det \Lambda}$ . Из этого представления следует, что с каждым вычетом  $\vec{m}_j$  из  $M_H^*(\Lambda)$  можно связать множество  $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) \subset \Lambda$ , заданное равенством

$$R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) = \{\vec{m}_{j,\nu} - \vec{m}_j | \nu = 1, \dots, N_1 - 1\}.$$

Так как все  $\vec{m}_{j,\nu}$  являются представителями различных классов вычетов по подрешётке  $\Lambda_1$ , то элементы из  $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j)$  не принадлежат решётке  $\Lambda_1$ .

Для произвольной целочисленной решётки  $\Lambda$  определим второй и третий гиперболические параметры.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** *Вторым гиперболическим параметром целочисленной решётки  $\Lambda$  называется наименьшее натуральное число  $q_2(\Lambda)$ , такое, что гиперболический крест  $K(q_2(\Lambda))$  содержит полную систему вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** *Третьим гиперболическим параметром целочисленной решётки  $\Lambda$  называется наибольшее натуральное число  $q_3(\Lambda)$ , такое, что все целые точки гиперболического креста  $K(q_3(\Lambda))$  содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$ . Другими словами все целые точки этого креста несравнимы по модулю  $\Lambda$ .*

Пусть  $N = \det \Lambda$ . Множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту  $K(T)$  обозначим через  $K_Z(T)$ .

Так как  $|K_Z(1)| = 3^s$ , то для любого  $N \geq 3^s$  определим функцию  $T_s(N)$  из условий  $|K_Z(T_s(N))| \leq N$ ,  $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$ . Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что при  $N < 3^s$  надо полагать  $q_3(\Lambda) = 0$ , так как минимальный крест  $K(1)$  содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решетки  $\Lambda$ , состоящая из  $N$  элементов.

В работе [46] доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 7.** *При  $N > e^{s \cdot e}$  справедливы неравенства:*

$$\begin{aligned} & \frac{(s-1)!(N-1)}{2^s \left(\ln N + \frac{3s}{2}\right)^{s-1}} \leq T_s(N) \leq \\ & \leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из определений 7 и 8 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперболическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов  $M^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно целочисленной решётки  $\Lambda$  такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) ? \quad (2.17)$$

Рассмотрим для примера случай решётки  $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$ . Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (2.18)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $N\mathbb{Z}^s$  можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \quad (2.19)$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \quad (2.20)$$

**ЛЕММА 10.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов  $M^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $\Lambda$  такая, что выполнены соотношения (2.17).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

**ЛЕММА 11.** *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов  $M_H^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $\Lambda$  удовлетворяет соотношению (2.17).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

Введем для произвольного вектора  $\vec{x}$  понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через  $r(\vec{x})$ . Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора:  $r(\vec{0}) = 0$ , а максимальное значение индекса равно  $s$ . Для целого вектора  $\vec{m}$  рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через  $r_2(\vec{m})$ .

**ЛЕММА 12.** *Если для целочисленной решётки  $\Lambda$  вектор  $\vec{m} \neq \vec{0}$  и имеет минимальное значение усеченной нормы ( $q(\vec{m}) = q(\Lambda)$ ), то для третьего гиперболического параметра решётки  $\Lambda$  справедлива оценка сверху:*

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m}) - r_2(\vec{m})}}. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Обозначим через  $J_s$  множество всех целочисленных векторов  $\vec{j}_s$ , каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел  $1, 2, \dots, s$ .

ЛЕММА 13. Пусть для заданного  $\vec{j}_s \in J_s$  вектора  $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$  целочисленной решётки  $\Lambda$  определены из условий:

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \quad (2.22)$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_\nu} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_\nu}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \quad (2.23)$$

где  $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$ , тогда они образуют базис решётки  $\Lambda$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Пусть числа  $N_1(\vec{j}_s), \dots, N_s(\vec{j}_s)$  определены равенствами:

$$N_\nu(\vec{j}_s) = \lambda_{\nu,j_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 8. Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  второй гиперболический параметр решётки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[ \frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \dots \left[ \frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

## 2.4.2. Тригонометрические суммы сеток и решёток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [48] и [47].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Тригонометрической суммой сетки  $M$  и произвольного целочисленного вектора  $\vec{m}$  называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки  $\Lambda$ , целого вектора  $\vec{m}$  и произвольного вектора  $\vec{x}$  из взаимной решётки  $\Lambda^*$  величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_\Lambda^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ  $\delta_\Lambda(\vec{m})$  является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решётки  $\Lambda$  будем называть выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^*/\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где  $\vec{m}$  — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda)$  справедливо равенство  $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решётки  $\Lambda^*$  целочисленной решётки  $\Lambda$  будем называть выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s/\Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где  $\vec{x}$  — произвольный вектор взаимной решётки  $\Lambda^*$  и  $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$  — полная система вычетов решётки  $\mathbb{Z}^s$  по подрешётке  $\Lambda$ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 9. Для  $s(\vec{m}, \Lambda)$  справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 10. Для любой целочисленной решетки  $\Lambda$  с  $\det \Lambda = N$  и для произвольного  $\vec{x} \in \Lambda^*$  справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

### 2.4.3. Неравенства для перенормировок на пространстве $E_s^\alpha$

Так как переход к произвольной периодической функции многих переменных, заданной на прямоугольном  $s$ -мерном параллелепипеде  $\prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$ , с периодом  $b_j - a_j$  по каждой переменной  $x_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ), делается с помощью простой линейной замены переменных, то дальше для простоты изложения будет рассматриваться только случай единичного  $s$ -мерного куба и класса периодических функций  $E_s^\alpha$ , у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций  $E_s^\alpha$  относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{m})(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| \quad (2.25)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству  $l_0$  — всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (2.25) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \quad (2.26)$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left( \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Относительно норм (2.26) и (2.27) класс  $E_s^\alpha$  становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [51]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\|f(\vec{x})\|_{l_2} \leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \quad (2.28)$$

Последнее неравенство (2.28) можно уточнить при дополнительном ограничении, что  $c(\vec{m}) = 0$  при  $\vec{m} \in K(t)$ . Предварительно сформулируем несколько лемм из работы [46].

Для натурального  $t > 1$  положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (2.29)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (2.30)$$

суммирование проводится только по натуральным  $m_1, \dots, m_j$ .

Так как  $t$  – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (2.31)$$

ЛЕММА 14. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (2.32)$$

ЛЕММА 15. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (2.33)$$

ЛЕММА 16. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left( \frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left( \sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (2.34)$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть натуральное  $t > 1$  и разложение периодической функции  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.35)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left( \sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Рассмотрим для любого натурального  $t$  конечномерное подпространство  $P^{(t)}$  всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.37)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (2.38)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В работе [46] доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 12. Справедливо неравенство

$$|K_Z(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left( \ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (2.40)$$

ТЕОРЕМА 13. Справедливо неравенство

$$|K_Z(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (2.41)$$

Из теоремы 12 и равенств (2.39) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s}{(s-1)!} \left( \ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Из оценки снизу (2.41) и равенства (2.39) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (2.43)$$

Таким образом, оценка сверху (2.42) и оценка снизу (2.43) совпадают по порядку относительно  $t$ .

#### 2.4.4. Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решётки

Теорема 10 позволяет доказать, что произвольную функцию  $f(\vec{x})$  на обобщенной параллелепипедальной сетке  $M(\Lambda)$  целочисленной решётки  $\Lambda$  с  $\det \Lambda = N$  можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 14. Для любой функции  $f(\vec{x})$  на  $M(\Lambda)$  справедливо равенство

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [51].  $\square$

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции  $f(\vec{x})$  в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda)$  целочисленной решётки  $\Lambda$  и выбрана произвольная полная система вычетов  $M^*(\Lambda)$  решётки  $\mathbb{Z}^s$  по подрешётке  $\Lambda$ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (2.44)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (2.45)$$

является интерполяционным для функции  $f(\vec{x})$ .

В другом контексте конечный ряд Фурье и интерполяционные формулы по обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки встречаются в работе В. А. Быковского [44]. Впервые многомерные конечные ряды Фурье для равномерной сетки встречаются в работах Н. М. Коробова [55].

Тригонометрический полином (2.44) зависит от полной системы вычетов  $M^*(\Lambda)$  решётки  $\mathbb{Z}^s$  по подрешётке  $\Lambda$ . Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать  $M^*(\Lambda)$ , чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе  $E_s^\alpha$ .

Рассмотрим сначала решётку  $N\mathbb{Z}^s$ . Как известно, для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  с  $\det \Lambda = N$  справедливо включение:  $N\mathbb{Z}^s \subset \Lambda$ . В следующей теореме будем использовать обозначения (2.18) и (2.19).

ТЕОРЕМА 15. Для любой периодической функции  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  и интерполяционного полинома  $S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})$  справедливы неравенства

$$|c(\vec{m}) - c_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{m})| \leq$$

$$\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \quad (2.46)$$

$$\|f(\vec{x}) - S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}2^\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}. \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Обозначим через  $M(\Lambda, \vec{x})$  сдвинутую обобщенную параллелепипедальную сетку, которая задается равенством

$$M(\Lambda, \vec{x}) = \{\{\vec{y} + \vec{x}\} | \vec{y} \in M(\Lambda)\}.$$

Докажем аналог теоремы 14 для случая сдвинутой обобщенной параллелепипедальной сетки.

ТЕОРЕМА 16. Для любой функции  $f(\vec{z})$  на  $M(\Lambda, \vec{x})$  справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если  $\vec{z} \in M(\Lambda, \vec{x})$ , то  $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}_0$ , где  $\vec{y}_0 \in M(\Lambda)$ , и имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} \right) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0), \vec{m}_j)} = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} \right). \end{aligned}$$

По теореме 10 имеем:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} s^*(\vec{y}_0 - \vec{y}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}_0) = f(\vec{z}).$$

Воспользуемся рядом Фурье для функции  $f(\vec{z})$ , получим по теореме 9

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{m}_j))} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n} - \vec{m}_j)} \frac{1}{N} s(\vec{n} - \vec{m}_j, \Lambda) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}. \end{aligned}$$

$\square$

### 2.4.5. Свойства оператора интерполирования

Формула (2.44) задает оператор интерполирования  $I_\Lambda$  на пространстве  $E_s^\alpha$ , который каждой функции  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (2.44). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (2.48)$$

Теорема 16 позволяет задать целый класс операторов интерполирования  $I_{\Lambda, \vec{x}}$  на пространстве  $E_s^\alpha$ . Каждой функции  $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$  поставим в соответствие ее интерполяционный многочлен

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (2.49)$$

ЛЕММА 17. Для любой функции  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  справедливо неравенство

$$\|I_\Lambda f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}. \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

ЛЕММА 18. Для любой функции  $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$  справедливо неравенство

$$\|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \quad (2.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению нормы  $\|\cdot\|_{l_1}$  имеем:

$$\begin{aligned} \|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \left| \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |c(\vec{m} + \vec{n})| = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{n})| = \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$\square$

ЛЕММА 19. Для любого тригонометрического полинома  $f(\vec{x})$  вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.53)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (2.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

ЛЕММА 20. Для любого тригонометрического полинома  $f(\vec{z})$  вида

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \quad (2.55)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = f(\vec{z}). \quad (2.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле (2.49)

$$\begin{aligned} I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ &= \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) = c(\vec{m}), \end{aligned}$$

так как  $s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) \neq 0$  только при  $\vec{k} = \vec{m}$  и лемма доказана.  $\square$

Множество тригонометрических полиномов вида (2.53) обозначим через  $P_{\Lambda}$ .

**ТЕОРЕМА 17.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  с  $\det \Lambda \geq 3^s$  и  $q_3(\Lambda) \geq 1$  на пространстве  $P^{(q_3(\Lambda))}$  для абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов  $M_{\mathbb{H}}^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $\Lambda$  справедливо равенство (2.54).*

При  $t > q_3(\Lambda)$  найдется тригонометрический полином  $f(\vec{x}) \in P^{(t)}$  такой, что равенство (2.54) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap \ker I_{\Lambda} \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Для любого  $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$  обозначим через  $E_{s, \vec{m}}^{\alpha}$  банахово подпространство пространства  $E_s^{\alpha}$ , состоящее из функций вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \quad (2.57)$$

Ясно, что имеет место разложение  $E_s^{\alpha}$  в прямую сумму  $E_{s, \vec{m}}^{\alpha}$ :

$$E_s^{\alpha} = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus E_{s, \vec{m}}^{\alpha}.$$

Отсюда следует, что произвольная функция  $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha}$  представима в виде сумм

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} f_{\vec{m}}(\vec{x}),$$

где

$$f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [51] показано, что для проектора  $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$  имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

Здесь для произвольного вектора  $\vec{x}$  под его дробной частью подразумевается вектор  $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$ .

**ТЕОРЕМА 18.** *На пространстве  $E_s^\alpha$  операторы  $A_{\vec{m}}$  и  $I_\Lambda$  коммутируют:*

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(f(\vec{x}))) = \left( \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.58)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

**ТЕОРЕМА 19.** *На пространстве  $E_s^\alpha$  ядро  $\ker I_\Lambda$  оператора интерполирования  $I_\Lambda$  имеет нормированный базис:*

$$f_{\vec{m}, \vec{n}}(\vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} (e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \quad (2.59)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Пространство  $E_s^\alpha$  разлагается в прямую сумму ядра  $\ker I_\Lambda$  оператора интерполирования  $I_\Lambda$  и пространства тригонометрических полиномов  $P_\Lambda$ :*

$$E_s^\alpha = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [50].  $\square$

Понятие проектора  $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$  является частным случаем оператора взвешенных сеточных средних из работы [2].

Для любой сетки  $M$  с весами  $\vec{\rho}$  рассмотрим на пространстве периодических функций  $E_s^\alpha$  линейный оператор  $A_{M, \vec{\rho}}$  взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (2.60)$$

Обозначим через  $A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m})$  действие линейного оператора  $A_{M, \vec{\rho}}$  на коэффициенты Фурье функции  $f(\vec{x})$ .

**ЛЕММА 21.** *Для любой периодической функции  $f(\vec{x})$  из пространства  $E_s^\alpha$  и её коэффициентов Фурье  $C(\vec{m})$  разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.61)$$

*справедливо равенство*

$$A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m}) = \frac{S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (2.62)$$



где  $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$  — тригонометрическая сумма сетки с весами, а  $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$  — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (2.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2].  $\square$

Отсюда непосредственно следует, что проектор  $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$  получается из оператора взвешенных сеточных средних при  $\rho_{\vec{m}}(\vec{y}) = e^{-2\pi i(\vec{y},\vec{m})}$ ,  $\vec{y} \in M(\Lambda)$ . Кроме этого, отметим, что все проекторы относятся к числу нормальных операторов, так как не увеличивают норму функции.

## 2.4.6. Оценки погрешности интерполирования

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решётки.

**ТЕОРЕМА 20.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  найдется функция  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \quad (2.64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

**ТЕОРЕМА 21.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов  $M_H^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $\Lambda$  для любой функции  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (2.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50].  $\square$

Если ввести оператор приближенного интерполирования  $R_\Lambda[f]$  с помощью обобщённой параллелепипедальной сетки целочисленной решётки равенством  $R_\Lambda[f] = f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))$ , то справедлива оценка для нормы

$$\|R_\Lambda[f]\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right).$$

Теорема 21 можно обобщить на случай произвольного оператора интерполирования  $I_{\Lambda,\vec{x}}$ .

**ТЕОРЕМА 22.** *Для любой целочисленной решётки  $\Lambda$  и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов  $M_H^*(\Lambda)$  фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  относительно подрешётки  $\Lambda$  для любой функции  $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$  справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:*

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda,\vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (2.66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой полной системы вычетов  $M^*(\Lambda)$  фундаментальной решетки  $\mathbb{Z}^s$ , относительно подрешетки  $\Lambda$  имеем:

$$f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} c(\vec{m} + \vec{n}) \left( e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{z})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \right). \quad (2.67)$$

Отсюда следует, что

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha}. \quad (2.68)$$

Теперь воспользуемся включением  $K(q_3(\Lambda)) \subset M_H^*(\Lambda)$ . Правая часть (2.68) только увеличится, если суммирование провести по всем целым точкам, не попавшим в гиперболический крест  $K(q_3(\Lambda))$ . Получим

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \quad (2.69)$$

Применяя к правой части (2.69) соотношения (2.28) и (2.36) при  $t = q_3(\Lambda)$ , получим утверждение теоремы.  $\square$

## 2.5. Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом останковки

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу приближенного интегрирования периодических функций многих переменных (см. также [49]). Известно, что для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left( \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции  $\|f\|_{E_s^\alpha}$ , как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье  $C(\vec{0})$ . Более того, относительно параметра гладкости  $\alpha$  для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции. Дадим следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.** Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции  $f(\vec{x})$  из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  с правилом останковки  $\Delta(f(\vec{x}))$ , если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных  $N_j$  с  $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$  и сеток с весами  $M(j), \vec{\rho}(j)$  из  $N_j$  взвешенных узлов равномерно распределенных в единичном  $s$ -мерном кубе такая, что для правила останковки  $\Delta(f(\vec{x})) < \varepsilon$  величина

$$\Delta(f(\vec{x})) = \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = 0. \quad (2.70)$$

В этом определении предполагается, что величина  $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$  алгоритмически выражается через веса и значения функции в узлах сетки. Кроме того предполагается, что для любого  $N_j$  из данной последовательности сетка с весами  $M(j), \vec{\rho}(j)$  алгоритмически вычисляется. В данной работе будет предложена в качестве правила остановки величины дискретной дисперсии и сеточного размаха, определение которых будет дано ниже. Таким образом, вычисление приближенного значения интеграла продолжается до тех пор, пока для заданного  $\varepsilon > 0$  не будет выполнено правило остановки  $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) < \varepsilon$ .

Следуя К. И. Бабенко [42] и О. В. Локуциевскому [57], дадим следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.** Будем говорить, что периодическая функция  $f(\vec{x})$  из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  принадлежит конечному показателю  $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ , если  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  и  $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$  для любого  $\beta > \alpha$ . В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса  $E_s$  принадлежит бесконечному показателю.

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция  $f(\vec{x}) \in E_s$  не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.** Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования  $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  ненасыщаемый типа  $(\gamma, \lambda)$ , если для любой периодической функции  $f(\vec{x})$  конечного показателя  $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$  и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot \alpha}}\right). \quad (2.71)$$

Как известно (см. [56]), методом оптимальных коэффициентов Коровова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа  $((s-1)\alpha, 1)$ , а модифицированным методом Фролова —  $((s-1), 1)$ . Для случая равномерных сеток имеем тип  $(0, \frac{1}{s})$ .

С точки зрения трудоемкости вычислений разумно выделить класс алгоритмов приближенного интегрирования, в которых  $j$ -ая квадратурная формула полностью использует результаты вычислений по  $j-1$ -ой квадратурной формуле. Дадим следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.** Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования  $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ , если для любого  $j \geq 1$  выполняются условия

$$M(j) \subset M(j+1), \quad \exists \rho : \forall \vec{x} \in M(j) : \rho_{j+1}(\vec{x}) = \rho \cdot \rho_j(\vec{x}). \quad (2.72)$$

Наиболее простой пример концентрических алгоритмов приближенного интегрирования дают квадратурные формулы с равными весами, построенными из первых членов бесконечной равномерно распределенной по модулю 1 бесконечной последовательности точек из единичного  $s$ -мерного куба. Другой класс концентрических алгоритмов приближенного интегрирования связан с понятием произведения сеток с весами.

Пусть даны две сетки с весами  $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$  и  $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ . Напомним определение произведения сеток с весами из работы [52], которое здесь несколько отличается для случая  $|M_3| \neq |M_1| \cdot |M_2|$  появлением нормировочного множителя.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.** *Произведением двух сеток с весами  $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$  и  $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$  называется третья сетка*

$$\langle M_3, \vec{\rho}_3 \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle, \quad (2.73)$$

где

$$M_3 = \{ \{ \vec{x} + \vec{y} \} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}, \quad (2.74)$$

$$\rho_3(\vec{z}) = \frac{|M_3|}{|M_1| \cdot |M_2|} \sum_{\substack{\vec{z} = \{ \vec{x} + \vec{y} \}, \\ \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \cdot \rho_2(\vec{y}), \quad (2.75)$$

и для любого вектора  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)$  дробной частью вектора называется вектор  $\{ \vec{z} \} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.** *Будем говорить, что задан мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования  $\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ , порожденный бесконечной последовательностью  $\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), если  $M^*(1) = M(1)$ ,  $\vec{\rho}^*(1) = \vec{\rho}(1)$  и для любого  $j \geq 1$  выполняются условия*

$$\langle M^*(j+1), \vec{\rho}^*(j+1) \rangle = \langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j) \rangle \cdot \langle M(j+1), \vec{\rho}(j+1) \rangle. \quad (2.76)$$

Нетрудно видеть, что если для каждой сетки  $\vec{0} \in M(j)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), то мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования будет концентрическим, так как в этом случае всегда  $M^*(j) \subset M^*(j+1)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.** *Мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования*

$$\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

*периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ , порожденный бесконечной последовательностью*

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

*с дополнительным условием*

$$\vec{0} \in M(j) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

*будем называть мультипликативным, концентрическим алгоритмом приближенного интегрирования.*

Пусть величины  $m_f, M_f$  — минимальное и максимальное значение функции  $f(\vec{x})$  определены, соответственно, равенствами

$$m_f = \min_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad M_f = \max_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad (2.77)$$

а размах функции  $v_f = M_f - m_f$ , тогда справедливо неравенство

$$v_f \leq \|f\|_{E_s^\alpha} 2((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1). \quad (2.78)$$

Очевидно, что для любого алгоритма приближенного интегрирования  $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) можно определить две числовые последовательности

$$m_f(j) = \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad M_f(j) = \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad (2.79)$$

для которых справедливы соотношения

$$m_f(j) \geq m_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} m_f(j) = m_f, \quad M_f(j) \leq M_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} M_f(j) = M_f. \quad (2.80)$$

Для любого концентрического алгоритма приближенного интегрирования  $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) будут выполнены дополнительные соотношения монотонности:

$$\begin{aligned} m_f &\leq \dots \leq m_f(j) \leq \dots \leq m_f(2) \leq m_f(1) \leq \\ &\leq M_f(1) \leq M_f(2) \leq \dots \leq M_f(j) \leq \dots \leq M_f. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Так как для "сеточного" размаха  $v_f(j) = M_f(j) - m_f(j)$  функции  $f(\vec{x})$  отличной от константы выполняется равенство  $\lim_{j \rightarrow \infty} v_f(j) = v_f > 0$ , то величину сеточного размаха нельзя использовать как правило остановки, но в качестве правила остановки можно использовать величину приращения сеточного размаха  $dv_f(j) = v_f(j) - v_f(j-1)$ , которая стремится к нулю, но с оговоркой, что если приращение сеточного размаха нулевое, то останавливаться можно только при  $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$ .

Таким образом, простейшее правило остановки для концентрического алгоритма можно определить как

$$\begin{aligned} &\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = \\ &= \max \left( \frac{1}{|M(j)|}, \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) + \min_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \max_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) \right) \quad (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Всё выше изложенное перенесём на случай интерполяции периодических функций по узлам, образующим обобщённую параллелепипедальную сетку целочисленной решётки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.** Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \Delta_I \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции  $f(\vec{x})$  из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  с правилом остановки  $\Delta_I(f(\vec{x}))$ , если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных  $N_j$  с  $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$

и обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток  $M(j)$  из  $N_j$  узлов равномерно распределённых в единичном  $s$ -мерном кубе такая, что для правила остановки  $\Delta_I(f(\vec{x})) < \varepsilon$  величина

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \Delta_I(f(\vec{x}), M(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_I(f(\vec{x}), M(j)) = 0. \quad (2.83)$$

Теперь можем дать новое определение ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.** Будем говорить, что алгоритм приближенного интерполирования  $\langle M(j), \Delta_I \rangle$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  ненасыщаемый типа  $(\gamma, \lambda)$ , если для любой периодической функции  $f(\vec{x})$  конечного показателя  $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$  и погрешности интерполирования выполняется равенство

$$\|R_{\Lambda_j}[f(\vec{x})]\|_C = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot (\alpha - 1)}}\right). \quad (2.84)$$

Вопрос о типе ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток остается открытым, так как в настоящее время нет оценок для третьего гиперболического параметра через детерминант решётки, а теорема 21 сформулирована в терминах третьего гиперболического параметра решётки.

Все определения с 15 по 18 преобразуются в соответствующие определения относительно интерполирования, если в них заменить слово интегрирование на интерполирование и удалить весовые функции.

Естественный вопрос, который возникает при рассмотрении мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интерполирования, это сходимость последовательности интерполирующих функций к интерполируемой в той или иной метрике. Этот вопрос рассмотрим в следующих разделах.

## 2.6. Вложенные последовательности параллелепипедальных сеток

Рассмотрим линейное сравнение

$$m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1).$$

Решётку решений этого сравнения обозначим через  $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ . Её базисная матрица будет иметь вид

$$A(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{s-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисная матрица взаимной решётки будет иметь вид

$$A^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{a_1}{N} & \cdots & \frac{a_{s-1}}{N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая параллелепипедальная сетка задается равенством

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \left\{ \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

Каждая параллелепипедальная сетка обладает важным свойством, что её проекция на любую координатную ось будет множеством точек  $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$ .

Очевидно, что если  $b_j \equiv a_j \pmod{N}$  ( $j = 1, \dots, s-1$ ), то

$$\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) = \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N),$$

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N)).$$

Кроме этого, отметим, что для любого целого  $c$  взаимно простого с  $N$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) &= \Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N), \quad M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \\ &= M(\Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N)). \end{aligned}$$

Нетрудно, указать полную систему вычетов фундаментальной решётки  $\mathbb{Z}^s$  по целочисленной подрешётке  $\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ . А именно, такой полной системой вычетов будет множество

$$M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Аналогичные полные системы вычетов  $M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$  можно выписать для любой координаты  $j = 2, \dots, s$ , если  $j$ -ая координата изменяется от 0 до  $N-1$ , а все остальные координаты нулевые.

Заметим, что указанные полные системы вычетов в некотором смысле самые плохие, так как для них третий гиперболический параметр  $q_3(M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))) = 0$ . Действительно, точка  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  имеет единичную усеченную норму, но не принадлежит полной системе вычетов  $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ .

Рассмотрим периодическую функцию  $f(\vec{x}) = e^{2\pi i x_2}$ . Для любой точки  $\vec{x} = \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right)$  параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$  имеем равенство

$$f\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}},$$

а интерполяционный многочлен будет иметь вид  $f_1(\vec{x}) = e^{2\pi i a_1 x_1}$  и для каждой точки  $\vec{x} = \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right)$  параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$  имеем равенство

$$f_1\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}}.$$

Очевидно, что интерполяционный многочлен  $f_1(\vec{x})$  не сходится к интерполируемой функции  $f(\vec{x})$  ни при каком  $N$ . Этот пример показывает, что выбор полной системы вычетов для построения интерполяционного многочлена играет принципиальную роль. Будем для краткости писать  $\Lambda$  вместо  $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$  и  $M_1^*(\Lambda)$  вместо  $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ . В новых обозначениях равенства (2.44) и (2.45) примут следующий парадоксальный вид:

$$S_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)} \left( \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) = \sum_{m=0}^{N-1} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) e^{2\pi i \frac{mk}{N}}, \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left( \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c((m, 0, \dots, 0) + \vec{n}). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Объяснить данный парадокс достаточно просто, если рассмотреть функцию одной переменной:

$$f_1 \left( \frac{k}{N} \right) = f \left( \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right).$$

Воспользуемся рядом Фурье для периодической функции  $f(\vec{x})$ , получим

$$f_1 \left( \frac{k}{N} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{N}},$$

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1 \left( \frac{k}{N} \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left( \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m)k}{N}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) \delta_N(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + (m, 0, \dots, 0)). \end{aligned}$$

Анализ формул (2.44) и (2.45) приводит к одному важному свойству коэффициентов интерполяционного многочлена. Эти коэффициенты с точностью до перестановки не зависят от полной системы вычетов, по которой строится интерполяционный многочлен.

Если мы имеем две целые точки  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$ , то легко определить, когда  $\vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}$ . Для этого достаточно вычислить величину  $\delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m})$ , которая задается равенством

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) &= \frac{1}{N} + \left\{ \frac{(n_1 - m_1 - 1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{(n_1 - m_1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}, \\ 0 & \text{при } \vec{n} \not\equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}. \end{cases} \end{aligned}$$



Обозначим через  $M_N(b)$  абсолютно наименьшее решение сравнения  $x + b \equiv 0 \pmod{N}$ . Нетрудно видеть, что

$$M_N(b) = \begin{cases} N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} \leq \frac{1}{2}, \\ N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} - N & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если  $(n_1, \dots, n_s) \equiv (m, 0, \dots, 0) \pmod{\Lambda}$  и  $n_2, \dots, n_s$  фиксированные, то наименьшее значение  $\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s$  достигается при  $n_1 = M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s)$ . Таким образом, возникает неоднородная задача минимизации выражения

$$\overline{M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s) \cdot \bar{n}_2 \dots \bar{n}_s} \rightarrow \min$$

по всем целым  $n_2, \dots, n_s$ . Если для каждого целого значения  $m$  из промежутка  $-\frac{N}{2} < m \leq \frac{N}{2}$  будет найден оптимальный набор  $n_2, \dots, n_s$ , то тем самым будет найдена абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов  $M_H^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ .

Пусть  $N = N_1 \cdot N_2$  и  $(N_1, N_2) = 1$ , тогда справедливо равенство для решёток и сеток

$$\begin{aligned} \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2), \\ M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2)). \end{aligned}$$

Остановимся более подробно на последнем равенстве о произведении сеток. Оно вытекает из равенства

$$\begin{aligned} &\left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) = \\ &= \left\{ \left( \frac{k_1}{N_1}, \left\{ \frac{a_1 k_1}{N_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k_1}{N_1} \right\} \right) + \left( \frac{k_2}{N_2}, \left\{ \frac{a_1 k_2}{N_2} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k_2}{N_2} \right\} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$k = N \left\{ \frac{k_1}{N_1} + \frac{k_2}{N_2} \right\}.$$

Верно и обратное утверждение, если  $N = N_1 \cdot N_2$ ,  $(N_1, N_2) = 1$  и

$$b_j \equiv a_j \pmod{N_1}, \quad c_j \equiv a_j \pmod{N_2} \quad (j = 1, \dots, s-1),$$

то

$$\begin{aligned} \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N), \\ M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)). \end{aligned}$$

Пусть для определенности  $N_1 > N_2$ . Нетрудно видеть, что параллелепипедальная сетка  $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$  представима как объединение сдвинутых обобщенных параллелепипедальных сеток  $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x})$ , когда  $\vec{x}$  пробегает все точки параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))$ :

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))} M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x}).$$

Для простоты записи положим  $\Lambda = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ ,  $\Lambda_\nu = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_\nu)$  ( $\nu = 1, 2$ ). В новых обозначениях получим  $M(\Lambda) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} M(\Lambda_1, \vec{x})$ . Для каждого  $\vec{x} \in M(\Lambda_2)$  определим функцию  $f_{\vec{x}}(\vec{z})$  равенствами

$$f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \begin{cases} f(\vec{z}) & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda_1, \vec{x}), \\ 0 & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x}). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для любой точки  $\vec{z}$  из параллелепипедальной сетки  $M(\Lambda)$  справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} f_{\vec{x}}(\vec{z}).$$

Так как функции  $f(\vec{z})$  и  $f_{\vec{x}}(\vec{z})$  ( $\vec{x} \in M(\Lambda_2)$ ) определены на сетке  $M(\Lambda)$ , то для них можно рассмотреть интерполяционные многочлены  $I_\Lambda f(\vec{z})$ ,  $I_\Lambda f_{\vec{x}}(\vec{z})$  и  $I_{\Lambda_1, \vec{x}} f(\vec{z})$ .

Согласно формулам (2.48) и (2.49) получим:

$$\begin{aligned} I_\Lambda f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \\ I_\Lambda f_{\vec{x}}(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right), \\ I_{\Lambda_1, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$I_\Lambda f(\vec{z}) - I_\Lambda f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} I_\Lambda f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) + \\ &+ \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left( \frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} - \frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

**ЛЕММА 22.** Для любой периодической функции  $f(\vec{x})$  из пространства  $E_s^\alpha$  и её коэффициентов Фурье  $C(\vec{m})$  разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.89)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \quad (2.90)$$

и оценка для нормы разности

$$\|I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})\|_C \leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right). \quad (2.91)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, подставляя ряд Фурье (2.89) в равенство (2.88), получим:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} \left( \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} - \\ &\quad - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \left( \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} C(\vec{n}) \left( \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_{\Lambda}(\vec{n} - \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_{\Lambda_1}(\vec{n} - \vec{m}) \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) + \\ &\quad + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \left( \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам по модулю, получим

$$\begin{aligned} \|I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})\|_C &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left( \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1} + n_1 \dots \overline{m_s} + n_s)^\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1} + n_1 \dots \overline{m_s} + n_s)^\alpha} \right) \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda_1))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \leq \\ &\leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left( \frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right). \end{aligned}$$

□

Из доказанной леммы следует, что в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного интерполирования периодических функций можно взять величину

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \max_{\vec{z} \in M(\Lambda)} |I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})|,$$

которая стремится к нулю при стремлении величины третьего гиперболического параметра к бесконечности.

## Глава 3

# Разработка программного обеспечения численного интегрирования и интерполирования

### 3.1. Библиотека численного интегрирования `MathAlgo.Integration`

Для вычисления интегралов можно использовать квадратурные формулы по параллелепедальным сеткам Коробова, впервые предложенные в работе [143].

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{k}{N}\right) + R1_N(g). \quad (3.1)$$

В рамках развития библиотеки алгоритмов, опубликованной на ПОИВС ТМК, было реализовано несколько алгоритмов численного интегрирования на языке C#. Язык программирования высокого уровня C# сочетает в себе высокую производительность, поддержку арифметики высокой точности и кроссплатформенность. Библиотека алгоритмов, а также все результаты численных экспериментов опубликованы в ПОИВС ТМК [144].

К особенностям программной реализации можно отнести:

- Реализована на кроссплатформенной платформе **.NET Core**.
- Поддерживаются типы длины 64, 96, 128 и 256 бит.
- Поддерживается многопоточность.

Базовой структурой сетки является интерфейс `IGrid`, предоставляющий доступ к перечислению всех точек, необходимых для проведения процесса интегрирования. Создание этого интерфейса позволяет использовать различные сетки в рамках одного алгоритма интегрирования и наоборот - различные алгоритмы интегрирования с одной сеткой.

```
public interface IGrid
{
    int Dimension { get; }
    long PointsCount { get; }
    IEnumerable<decimal[]> Points { get; }
}
```

**Algorithm 1:** Интерфейс IGrid

Реализованы теоретико-числовые сетки произвольной размерности

- параллелепипедальные;
- неравномерные;
- двумерные сетки Смоляка.

Простейшую периодизацию двумерной функции по одной переменной можно производить с помощью способа, указанного в работе [60]. Для этого введем вспомогательную функцию:

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & 0 \leq y \leq 1 \\ f_1(x, 2 - y), & 1 < y \leq 2 \end{cases}, \quad 2 \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 f_2(x, y) dx dy.$$

Рассмотрим квадратурную формулу по растянутой параллелепипедальной сетке:

$$\int_0^1 \int_0^2 g(x, y) dx dy = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R_{2N}(g). \quad (3.2)$$

Применяя к функции  $f_2$ , получаем периодизированную по одной переменной квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 f_2(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R_{2N}(f_2) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right) + R_{2N}(f_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эта периодизация реализована в классе `PeriodisedIntegration2D`.

```

public class ParallelepipedalGrid : IGrid
{
    private readonly long[] _a;
    private readonly long _p;
    private readonly int _s;

    public ParallelepipedalGrid(long p, params long[] a)
    {
        _a = new [] { 1L }.Concat(a).ToArray();
        _p = p;
        _s = _a.Length;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => _p;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            long[] ai = Enumerable.Repeat(0L, _s).ToArray();
            decimal[] bi = new decimal[_s];
            for (long i = 0; i < _p; i++)
            {
                for (int j = 0; j < _s; j++)
                {
                    ai[j] += _a[j];
                    if (ai[j] >= _p)
                        ai[j] -= _p;

                    bi[j] = (decimal)ai[j] / _p;
                }

                yield return bi;
            }
        }
    }
}

```

**Algorithm 2:** Реализация параллелепипедальной сетки ParallelepipedalGrid

```

public class UnevenGrid : IGrid
{
    private readonly long _p;
    private readonly int _s;

    public UnevenGrid(long p, int s)
    {
        _p = p;
        _s = s;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => _p;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            decimal[] bi = new decimal[_s];
            for (long i = 1; i <= _p; i++)
            {
                long k = i;
                for (int j = 0; j < _s; j++)
                {
                    k = (k * i) % _p;
                    bi[j] = (decimal) k / _p;
                }

                yield return bi;
            }
        }
    }
}

```

**Algorithm 3:** Реализация неравномерной сетки UnevenGrid



```

public class SmolyakSubGrid2D : IGrid
{
    private readonly int _q;
    private readonly int _s;

    public SmolyakSubGrid2D(int q, int s)
    {
        _q = q;
        _s = s;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => 1;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            long c_k_s1 = 1;
            long[] ai = Enumerable.Repeat(0L, _s).ToArray();
            decimal[] bi = new decimal[_s];

            foreach (var vs in GenerateC())
            {
                var _2vs0 = Helpers.Pow(2, vs[0]);
                var _2vs1 = Helpers.Pow(2, vs[1]);

                for (var k0 = 0; k0 < _2vs0; k0++)
                {
                    for (var k1 = 0; k1 < _2vs1; k1++)
                    {
                        bi[0] = (decimal)k0 / _2vs0;
                        bi[1] = (decimal)k1 / _2vs1;
                        yield return bi;
                    }
                }
            }
        }
    }

    private IEnumerable<int[]> GenerateC()
    {
        for (var i = 1; i < _q; i++)
        {
            yield return new[] { i, _q - i };
        }
    }
}

```

```

public class PeriodisedIntegration2D
{
    private readonly IGrid _grid;
    private readonly long _p;
    private readonly long _p2;

    public PeriodisedIntegration2D(IGrid grid)
    {
        _grid = grid;
        _p = grid.PointsCount;
        _p2 = _p / 2 + 1;
    }

    public decimal Integrate(Func<decimal, decimal, decimal> f)
    {
        return Integrate(xs => f(xs[0], xs[1]));
    }

    public decimal Integrate(Func<decimal[], decimal> f)
    {
        decimal res = 0;
        long i = 0;
        foreach (var bi in _grid.Points)
        {
            bi[1] = i++ < _p2 ? bi[1] : 2m - bi[1];
            res += f(bi);
        }

        res /= _p;
        return res;
    }
}

```

**Algorithm 5:** класс PeriodisedIntegration2D

Качество параллелепипедальных сеток оценивается либо через гиперболический параметр решётки  $\Lambda(a, N)$  линейного сравнения  $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod N$

$$q(\Lambda(a, N)) = \min(\bar{m}_1, \bar{m}_2), \quad \bar{x} = \max\{1, x\}, \quad (3.4)$$

либо через суммы Быковского

$$S(B(\Lambda(a, N)), \alpha) = \sum_{(x_1, x_2) \in B(\Lambda(a, N))} \frac{1}{(\bar{x}_1 \bar{x}_2)^\alpha} \quad (3.5)$$

где  $\alpha$  — параметр гладкости,  $B(\Lambda(a, N))$  — множество относительных минимумов решётки  $\Lambda(a, N)$ ,

В работе [63] изложен алгоритм гиперболический параметр решётки через построение множества Быковского. Он реализован в функции `CalcHyperbolicParameter`, которая использует классы, реализующие множество Быковского `ContinuedFraction` и цепную дробь `ContinuedFraction`.

```
public static long CalcHyperbolicParameter(long n, long a)
{
    var gp = Math.Max(Math.Min(a, n - a), 1L);
    var bs = new BykovskySet(new ContinuedFraction(a, n)).Points;
    for (var i = 0; i < bs.Length - 1; i++)
    {
        var gp1 = Math.Abs(bs[i][0]) * bs[i][1];
        if (gp1 < gp)
        {
            gp = gp1;
        }
    }

    return gp;
}
```

**Algorithm 6:** Реализация вычисления гиперболического параметра решётки `CalcHyperbolicParameter`

```

public class BykovskySet
{
    public long[][] Points { get; }

    public BykovskySet(ContinuedFraction fraction)
    {
        var t = new long[fraction.A.Count + 2];
        t[0] = 0;
        t[1] = 1;
        for (var i = 2; i < fraction.A.Count + 2; i++)
        {
            t[i] = fraction.A[fraction.A.Count + 1 - i] * t[i - 1]
                + t[i - 2];
        }

        Points = new long[fraction.A.Count][];
        var e = 1;
        for (var i = 0; i < Points.Length; i++)
        {
            Points[i] = new[] {e * t[Points.Length - i - 1],
                fraction.Q[i]};
            e *= -1;
        }
    }
}

```

**Algorithm 7:** Реализация множества Быковского BykovskySet

```

public class ContinuedFraction
{
    public List<long> A { get; } = new List<long>();
    public List<long> P { get; } = new List<long>();
    public List<long> Q { get; } = new List<long>();

    public ContinuedFraction(long a, long b)
    {
        long r = 1, t, p1 = 0, p2 = 1, q1 = 1, q2 = 0;
        while (r > 0)
        {
            var x = a / b;

            A.Add(x);

            r = a - x * b;
            a = b;
            b = r;

            t = p2;
            p2 = p2 * x + p1;
            p1 = t;

            t = q2;
            q2 = q2 * x + q1;
            q1 = t;

            P.Add(p2);
            Q.Add(q2);
        }
    }
}

```

**Algorithm 8:** Реализация цепной дроби ContinuedFraction

## 3.2. Библиотека численного интегрирования MathAlgo.Interpolation

Теоретическое построение быстрого дискретного преобразование Фурье на многомерных теоретико-числовых сетках изложено в статье [144]. В ней впервые было получено преобразование, сводящее  $s$ -мерную интерполяцию в одномерную. Использование этих результатов позволяет получить наиболее быструю интерполяцию в многомерном случае, и для периодических функций - наиболее точную [145].

В рамках развития существующей библиотеки численных алгоритмов на языке C#, опубликованной на ПОИВС ТМК [143], был реализован функционал:

- многомерного преобразования Фурье по параллелепипедальным сеткам;
- многомерного численного интерполирования;
- построения минимальных сферических и гиперболических систем вычетов.

Сама библиотека опубликована в общедоступном пакетном менеджере Nuget [147]. Внутренняя реализация быстрого преобразования Фурье использует библиотеку MathNet.Numerics.

Построение оптимальной гиперболической сетки выполняется непосредственным перебор всех точек под гиперболой с асимптотической сложностью  $O(N \log N)$ .

Для построения оптимальной сферической сетки производится предварительная редукция базиса параллелепипедальной сетки по полной системы вычетов с помощью алгоритма Ленстры-Ленстры-Ловаса (LLL-алгоритма).

```

public static Complex[] Direct(double[] y)
{
    var data = ToComplex(y);
    Fourier.Forward(data, FourierOptions.NoScaling);

    var coeffs = new Complex[y.Length];
    data.CopyTo(coeffs, 0);

    return coeffs;
}

private static Complex[] ToComplex(double[] data)
{
    int length = data.Length;

    var result = new Complex[length];

    for (int i = 0; i < length; i++)
    {
        result[i] = new Complex(data[i], 0.0);
    }

    return result;
}

```

**Algorithm 9:** Реализация прямого преобразования Фурье

```

public static double[] Interpolate(Complex[] coeffs, double[] xs)
{
    int size = coeffs.Length;
    var kn = new List<double>(size);
    for (int i = 0; 2 * i < size; i++)
    {
        kn.Add((double)i / size);
    }
    for (int i = size / 2; i > 0; i-)
    {
        kn.Add((double)i / size);
    }
    var eikx = Eikx(xs, kn.ToArray(), size);
    var res = Dot(eikx, coeffs);
    return res.Select(x => x.Real / size).ToArray();
}
private static Complex[][] Eikx(double[] a, double[] b, int size)
{
    var res = new Complex[a.Length][];
    for (int i = 0; i < a.Length; i++)
    {
        res[i] = new Complex[b.Length];
        for (int j = 0; j < b.Length; j++)
        {
            var eikx = a[i] * b[j];
            res[i][j] = Complex.Exp(new Complex(0, 2) * Math.PI * size * eikx);
        }
    }

    return res;
}
private static Complex[] Dot(Complex[][] a, Complex[] b)
{
    var res = new Complex[a.Length];
    for (int i = 0; i < a.Length; i++)
    {
        res[i] = new Complex(0, 0);
        for (int j = 0; j < b.Length; j++)
        {
            res[i] += a[i][j] * b[j];
        }
    }
    return res;
}

```

**Algorithm 10:** Реализация интерполяции по коэффициентам Фурье



```

var basis = LLL.Reduction(new[] { new[] { -a, 1 }, new[] { n, 0 } });

long x_min = (int)1e9, x_max = -(int)1e9, y_min = (int)1e9, y_max = -(int)1e9;
foreach (var (x1, x2) in new[] { (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1) })
{
    var v0 = x1 * basis[0][0] + x2 * basis[1][0];
    var v1 = x1 * basis[0][1] + x2 * basis[1][1];

    x_min = Math.Min(x_min, v0);
    x_max = Math.Max(x_max, v0);
    y_min = Math.Min(y_min, v1);
    y_max = Math.Max(y_max, v1);
}
var n1 = n / 2;
var n2 = (n - 1) / 2;
var r = Enumerable.Range(0, (int)n).Select(i => new[]
{
    i - n2,
    0,
    (i - n2) * (i - n2),
    0
})
.ToArray();

for (long ii = x_min; ii <= x_max; ii++)
{
    for (long j = y_min; j <= y_max; j++)
    {
        var u = (ii + a * j) % n;
        if (u > n1)
            u = u - n;
        if (u < -n2)
            u = u + n;
        var gn = ii * ii + j * j;
        if (r[u + n2][2] > gn)
        {
            r[u + n2][0] = ii;
            r[u + n2][1] = j;
            r[u + n2][2] = gn;
            r[u + n2][3] = u;
        }
    }
}
return r.OrderBy(x => x[3]).Select(x => new[]
{ (double)x[0], (double)x[1] }).ToArray();

```

**Algorithm 11:** Построение минимальных сферических систем вычетов

```

var n1 = n / 2;
var n2 = (n - 1) / 2;

var r = Enumerable.Range(0, (int)n).Select(i => new[]
{
    i - n2,
    0,
    Math.Max(1, Math.Abs(i - n2)),
    0
})
.ToArray();

for (int i = 0; i < n; i++)
{
    var ii = i - n2;
    var iic = Math.Max(1, Math.Abs(ii));
    var m1 = n1 / iic;
    var m2 = -m1;
    for (long j = m2; j <= m1; j++)
    {
        var u = (ii + a * j) % n;
        if (u > n1)
            u = u - n;
        if (u < -n2)
            u = u + n;

        var jc = Math.Max(1, Math.Abs(j));
        var gn = iic * jc;
        if (r[u + n2][2] > gn)
        {
            r[u + n2][0] = ii;
            r[u + n2][1] = j;
            r[u + n2][2] = gn;
            r[u + n2][3] = u;
        }
    }
}

return r.Select(x => new[] { (double)x[0], (double)x[1] }).ToArray();

```

**Algorithm 12:** Построение минимальных гиперболических систем вычетов

```

public static long[][] Reduction(long[][] x, double delta = 0.75)
{
    var basis = x.ToFraction();
    var n = basis.Length;
    var ortho = GramSchmidt(basis);

    var k = 1;
    while(k < n)
    {
        for (int j = k - 1; j > -1; j--)
        {
            var mu_kj = Mu(ortho, basis, k, j);
            if (Math.Abs(mu_kj.Numerator) * 2 > mu_kj.Denominator)
            {
                basis[k] = basis[k].Sub(basis[j].
                    Mul((long)Math.Round((double)mu_kj)));
                ortho = GramSchmidt(basis);
            }
        }

        var mu = (double)Mu(ortho, basis, k, k - 1);
        var coef = delta - mu * mu;
        if ((double)ortho[k].SDot() >= coef * coef * (double)ortho[k - 1].SDot())
        {
            k++;
        }
        else
        {
            (basis[k], basis[k - 1]) = (basis[k - 1], basis[k]);

            ortho = GramSchmidt(basis);
            k = Math.Max(k - 1, 1);
        }
    }

    return basis.Select(arr => arr.Select(t => t.Numerator).ToArray()).ToArray();
}

```

```

private static Fraction[][] GramSchmidt(Fraction[][] v)
{
    var u = new List<Fraction[]>();
    foreach (var vi in v)
    {
        var ui = vi.Select(t => new Fraction(t.Numerator, t.Denominator)).
            ToArray();
        foreach (var uj in u)
        {
            ui = ui.Sub(uj.Proj(vi));
        }

        u.Add(ui);
    }

    return u.ToArray();
}

private static Fraction[][] ToFraction(this long[][] self)
{
    return self.Select(i => i.ToFraction()).ToArray();
}

private static Fraction[] ToFraction(this long[] self)
{
    return self.Select(i => new Fraction(i)).ToArray();
}

private static Fraction Mu(Fraction[][] ortho, Fraction[][] basis, int i, int j)
{
    return ortho[j].ProjCoff(basis[i]);
}

private static Fraction ProjCoff(this Fraction[] self, Fraction[] rhs)
{
    return self.Dot(rhs) / self.SDot();
}

```

```

private static Fraction[] Proj(this Fraction[] self, Fraction[] rhs)
{
    var x = self.ProjCoff(rhs);
    return self.Select(i => x * i).ToArray();
}

private static Fraction SDot(this Fraction[] self)
{
    return self.Dot(self);
}

private static Fraction Dot(this Fraction[] self, Fraction[] rhs)
{
    var res = new Fraction(0);
    for (int i = 0; i < self.Length; i++)
    {
        res += self[i] * rhs[i];
    }
    return res;
}

private static Fraction[] Sub(this Fraction[] self, Fraction[] rhs)
{
    return self.Select((v, i) => v - rhs[i]).ToArray();
}

private static Fraction[] Mul(this Fraction[] self, Fraction[] rhs)
{
    return self.Select((v, i) => v * rhs[i]).ToArray();
}

private static Fraction[] Mul(this Fraction[] self, long rhs)
{
    return self.Select(v => v * rhs).ToArray();
}

```

**Algorithm 13:** Реализация алгоритма Ленстры-Ленстры-Ловаса

## Глава 4

# Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье

### 4.1. Некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$

Пусть  $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$  — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1 - t^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , и нормированные условием  $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$ ,

$$d_{n,\alpha} = \max_{[-1,1]} |P_n^{(\alpha)}(t)|. \quad (4.1)$$

При  $\alpha \geq -1/2$ ,  $d_{n,\alpha} = 1$  (см. [72]). С многочленами Гегенбауэра  $C_n^\lambda(t)$ , ортогональными с весом  $(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$  (см. [76, Chap. X, 10.9]), многочлены  $P_n^{(\alpha)}(t)$  связаны соотношением

$$\frac{1}{\lambda} C_n^\lambda(t) = \frac{2\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda + 1)} P_n^{(\lambda-1/2)}(t), \quad \lambda > -1/2. \quad (4.2)$$

Пусть  $\lambda > -1/2$ ,  $dm_\lambda(t) = c_\lambda(1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt$  — вероятностная мера на отрезке  $[-1, 1]$ ,

$$c_\lambda^{-1} = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda + 1)}. \quad (4.3)$$

Приведем некоторые свойства преобразования  $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ , вытекающие из [70, 72, 73].

Обозначим  $\|e_{r,\lambda}(xy)\|_\infty = M_{r,\lambda}$ . При  $\lambda > -1/2$  для  $\mathcal{F}_{r,\lambda}$  справедливо представление

$$e_{r,\lambda}(xy) = \int_{-1}^1 (1 + \text{sign}(xy)P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)) e^{-ixyt} dm_\lambda(t). \quad (4.4)$$

Из (4.1)–(4.4) вытекают оценки

$$M_{r,\lambda} \leq 1 + d_{2r,\lambda-1/2}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1, \quad \lambda \geq 0.$$

Преобразование  $\mathcal{F}_{r,\lambda}$  — унитарный оператор,  $\mathcal{F}_{r,\lambda}(e^{-| \cdot |^2/2})(y) = e^{-|y|^2/2}$ , и для  $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$(\mathcal{F}_{r,\lambda}(f), \mathcal{F}_{r,\lambda}(g)) = (f, g),$$

где

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\nu_{\lambda}(x).$$

Обратный оператор имеет вид

$$(\mathcal{F}_{r,\lambda})^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(y).$$

Равенство

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(y)$$

справедливо не только в  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ , но и поточечно, если  $f$  принадлежит классу

$$\mathcal{A} = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f, \mathcal{F}_{r,\lambda}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})\}.$$

Неравенство Хаусдорфа–Юнга имеет вид

$$\|\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\|_{p', d\nu_{\lambda}} \leq M_{r,\lambda}^{\frac{2}{p}-1} \|f\|_{p, d\nu_{\lambda}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Укажем дифференциально-разностный оператор, для которого ядро  $e_{r,\lambda}(xy)$  является собственной функцией. Пусть

$$\Delta_{\lambda}f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda+1}{x}f'(x) - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2}$$

— лапласиан Данкля [71],

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\lambda}f(x) &= \Delta_{\lambda}f(x) - (2r-1) \left(\lambda + r + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2} \\ &= f''(x) + \frac{2\lambda+1}{x}f'(x) - 2r(r+\lambda) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор  $\Delta_{r,\lambda}$  получен из оператора  $\delta_{k,a}f(x) = |x|^{2-a}\Delta_k f(x)$  при  $a = \frac{1}{r}$ ,  $k = \lambda + 1/2$ .

ЗАДАЧА. Если  $D_{\lambda}f(x) = f'(x) + (\lambda+1/2)(f(x) - f(-x))/x$ , то  $D_{\lambda}^2f = \Delta_{\lambda}f$ . Для какого оператора  $D_{r,\lambda}f$ ,  $D_{r,\lambda}^2f = \Delta_{r,\lambda}f$ ? Существование оператора  $D_{r,\lambda}f$  основано на том, что для операторов  $A = \Delta_{\lambda}$ ,  $\Delta_{r,\lambda}$  и подходящих функций квадратичная форма  $(Af, f) \leq 0$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Справедливы равенства

$$(\Delta_{r,\lambda})_x e_{r,\lambda}(xy) = -y^2 e_{r,\lambda}(xy), \quad \Delta_{r,\lambda}(x^{2r} \operatorname{sign} x) = 0. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро  $e_{r,\lambda}(xy)$  запишем в виде

$$e_{r,\lambda}(xy) = f_1(x) + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} y^{2r} \operatorname{sign} y f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = j_{\lambda}(xy), \quad f_2(x) = x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r}(xy).$$

Нужно показать, что

$$\Delta_{r,\lambda}f_1(x) = -y^2 f_1(x), \quad \Delta_{r,\lambda}f_2(x) = -y^2 f_2(x). \quad (4.7)$$

Так как ядро  $j_\lambda(xy)$  является собственной функцией оператора Бесселя

$$B_\lambda f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda + 1}{x} f'(x)$$

(см., например, [77]), то равенство  $\Delta_{r,\lambda} f_1(x) = -y^2 f_1(x)$  выполнено.

Воспользовавшись формулами

$$j'_\lambda(x) = -\frac{x}{2(\lambda + 1)} j_{\lambda+1}(x),$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda + 1)(\lambda + 2)} j_{\lambda+2}(x) = j_{\lambda+1}(x) - j_\lambda(x)$$

[72, 77], получим

$$f'_2(x) = 2r|x|^{2r-1} j_{\lambda+2r}(xy) - \frac{1}{2(\lambda + 2r + 1)} |x|^{2r+1} y^2 j_{\lambda+2r+1}(xy),$$

$$f''_2(x) = 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign} x j_{\lambda+r}(xy) - \frac{(4r + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r+1}(xy)$$

$$+ \frac{(xy)^2}{4(\lambda + 2r + 1)(\lambda + 2r + 2)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r+2}(xy) = 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign} x j_{\lambda+r}(xy)$$

$$- \frac{(4r + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r+1}(xy) + y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x (j_{\lambda+2r+1}(xy) - j_{\lambda+2r}(xy))$$

$$= 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign} x j_{\lambda+r}(xy) + \frac{(2\lambda + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r+1}(xy)$$

$$- y^2 x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r}(xy), \quad \frac{f_2(x) - f_2(-x)}{x^2} = 2x^{2r-2} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r}(xy).$$

Отсюда и из (4.5) вытекает (4.7) для  $f_2$ . Первое равенство в (4.2) получено. Второе равенство в (4.6) получается из (4.7) для  $f_2$  при  $y = 0$ . Предложение 1 доказано.

Пусть для  $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(x) + x^{2r} \operatorname{sign} x F_2(x) : F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 - \text{четные}\}. \quad (4.8)$$

Отметим, что  $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$  и  $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$  плотно в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

ТЕОРЕМА 1. Если  $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ , то  $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)$ ,  $\Delta_{r,\lambda} f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ , то согласно (8), (9), (4.8)

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x) + \frac{(-1)^r y^{2r} \operatorname{sign} y}{2^{2r} (\lambda + 1)_{2r}} \int_{\mathbb{R}} x^{4r} F_2(x) j_{\lambda+2r}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}} F_1(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x), \int_{\mathbb{R}} x^{4r} F_2(x) j_{\lambda+2r}(xy) d\nu_\lambda(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(см. [71]), то  $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ .

Далее, применяя (4.6), (4.8), получим

$$\Delta_{\lambda,r} f(x) = F_1''(x) + (2\lambda + 1) \frac{F_1'(x)}{x} + x^{2r} \operatorname{sign} x \left( F_2''(x) + (4r + 2\lambda + 1) \frac{F_2'(x)}{x} \right)$$



$$+F_2(x)\Delta_{\lambda,r}(x^{2r}\operatorname{sign}x) = G_1(x) + x^{2r}\operatorname{sign}x G_2(x),$$

где

$$G_1(x) = F_1''(x) + (2\lambda + 1)\frac{F_1'(x)}{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad G_2(x) = F_2''(x) + (4r + 2\lambda + 1)\frac{F_2'(x)}{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

и  $G_1(x), G_2(x)$  — четные функции. Следовательно,  $\Delta_{\lambda,r}f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ . Теорема 1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если  $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$  и  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_{\lambda,r}^n f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x) = (-1)^n y^{2n} \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $n = 1$  предложение 2 доказывается как равенство (6.7) в [72], опираясь на теорему 5.6 из [70]. Для  $n > 1$  предложение 2 вытекает из теоремы 1.

## 4.2. Операторы обобщенного сдвига

При построении операторов обобщенного сдвига будем следовать работам [73, 74]. Для  $x, y \in \mathbb{R}$  рассмотрим два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) \quad (4.9)$$

и

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z). \quad (4.10)$$

В пространстве  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  для них справедливы оценки

$$\|\tau^y f\|_{2,d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda} \|f\|_{2,d\nu_\lambda}, \quad \|T^y f\|_{2,d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{2,d\nu_\lambda}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Получим для операторов (4.9), (4.10) интегральные представления. Напомним теорему сложения Гегенбауэра для нормированной функции Бесселя [78, Чап. XI, 11.4]:

$$j_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \lambda}{\lambda} \frac{x^k}{2^k(\lambda + 1)_k} j_{\lambda+k}(x) \frac{y^k}{2^k(\lambda + 1)_k} j_{\lambda+k}(y) C_k^\lambda(t),$$

где  $\lambda > -1/2$ ,  $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $|t| \leq 1$ .

Используя ортогональность многочленов Гегенбауэра, из теоремы сложения легко получаются следующие теоремы умножения Гегенбауэра [78, Чап. XI, 11.41]:

$$j_\lambda(xz) j_\lambda(yz) = \int_{-1}^1 j_\lambda(Az) dm_\lambda(t), \quad (4.11)$$

$$\frac{(xz)^{2r} j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda + 1)_{2r}} \frac{(yz)^{2r} j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda + 1)_{2r}} = \int_{-1}^1 j_\lambda(Az) P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t) dm_\lambda(t). \quad (4.12)$$

Использование многочлена  $P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)$  в (4.12) дает более компактную форму записи.

Новая теорема умножения [75], записанная нами с использованием многочленов Генбауэра  $P_n^{(\lambda-1/2)}(x)$ , имеет вид:

$$(xz)^{2r} j_{\lambda+2r}(xz) j_{\lambda}(yz) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+2r}(Az) (Az)^{2r} P_{2r}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) dm_{\lambda}(t). \quad (4.13)$$

Левые части (4.11)–(4.13) являются четными по  $x, y$ . Правые части также четным образом зависят от  $x, y$ . В этом можно убедиться, делая в интегралах замены переменных  $t \rightarrow -t; x \rightarrow -x, t \rightarrow -t; y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$ . Следовательно, равенства (4.11)–(4.13) справедливы при  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Ввиду важности теоремы умножения (4.13) в приложении для нее приводится более простое чем в [75] доказательство.

Если  $f_e(x), f_o(x)$  — четная и нечетная составляющие функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то применяя (9), (4.11)–(4.13) и используя для краткости обозначение  $\lambda_0 = \lambda - 1/2$ , получим

$$\begin{aligned} e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz) &= j_{\lambda}(xz)j_{\lambda}(yz) \\ &+ \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \left\{ (xz)^{2r} \text{sign}(xz) j_{\lambda+2r}(xz) j_{\lambda}(yz) + (yz)^{2r} \text{sign}(yz) j_{\lambda+2r}(yz) j_{\lambda}(xz) \right\} \\ &\quad + \frac{(xz)^{2r} \text{sign}x j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \frac{(yz)^{2r} \text{sign}y j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ (e_{r,\lambda}(Az))_e (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) \right. \\ &\quad \left. + (e_{r,\lambda}(Az))_o \left( \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) + \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) \left( 1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) + \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) + e_{r,\lambda}(-Az) \left( 1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) - \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} j_{\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz) &= j_{\lambda}(xz)j_{\lambda}(yz) + \frac{(-1)^r (xz)^{2r} \text{sign}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} j_{\lambda+2r}(xz) j_{\lambda}(yz) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) + e_{r,\lambda}(-Az) \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right\} dm_{\lambda}(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) \left( 1 + \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + e_{r,\lambda}(-Az) \left( 1 - \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отметим, что при  $|t| \leq 1$

$$1 - \frac{(x-yt)^2}{A^2} = \frac{(1-t^2)y^2}{A^2} \geq 0, \quad \frac{|x-yt|}{A} \leq 1. \quad (4.16)$$

Пусть  $x, y \in \mathbb{R}$ . Опираясь на (4.14) и (4.15), определим два линейных оператора

$$\begin{aligned} \tau_1^y f(x) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left( 1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right) \right. \\ & + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) + \operatorname{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{y - xt}{A} \right) \\ & \left. + f(-A) \left( 1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) - \operatorname{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{y - xt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$\begin{aligned} T_1^y f(x) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left( 1 + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) \right) \right. \\ & \left. + f(-A) \left( 1 - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

На подпространстве четных функций

$$\tau_1^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) (1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t). \quad (4.19)$$

Оператор (4.17) навеян соответствующим оператором в работах [79, 80]. Из (4.18) и (4.19) вытекает, что оператор  $\tau_1^y$  на четных функциях и оператор  $T_1^y$  при  $\lambda \geq 0$  положительные и  $T_1^{-y} = T_1^y$  при  $\lambda > -1/2$ .

Для оценки  $L^p$ -норм операторов (4.17)–(4.19) определим некоторые вспомогательные операторы.

Пусть функция  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  – четная и измеримая по Борелю, функция  $\psi(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$  – нечетная по  $x$ , функция  $\varphi(t, x, y): [-1, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$  и  $g(\varphi(-t, -x, y)) = g(\varphi(-t, x, -y)) = g(\varphi(t, x, y))$ , функции  $\psi, \varphi$  – измеримые по Лебегу, и линейные операторы  $T_g^y, \tilde{T}_g^y$ , определены равенствами

$$\begin{aligned} T_g^y f(x) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) (1 + \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) \right. \\ & \left. + f(-A) (1 - \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) \right\} dm_\lambda(t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\tilde{T}_g^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) (1 + \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) dm_\lambda(t). \quad (4.21)$$

ЛЕММА 1. Для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $y \in \mathbb{R}$  операторы  $T_g^y f(x), \tilde{T}_g^y f(x)$  положительные. Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то

$$\|T_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}, \quad (4.22)$$

если дополнительно  $\int_{-1}^1 g(\varphi(t, x, y)) dm_\lambda(t) = 0$  для всех  $x, y$ , то

$$\|\tilde{T}_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}. \quad (4.23)$$

Если функция  $\psi(x, y)$  четная по  $y$ , то и операторы  $T_g^y, \tilde{T}_g^y$  четные по  $y$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $f(x) \geq 0$ , то  $T_g^y f(x) \geq 0$ ,  $\tilde{T}_g^y f(x) \geq 0$ .  
Если  $p = \infty$ , то согласно (4.20)

$$\begin{aligned} \|T_g^y f\|_\infty &\leq \frac{1}{2} \sup_x \int_{-1}^1 \{(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y)))\} dm_\lambda(t) \|f\|_\infty = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора  $\tilde{T}_g^y f$  при дополнительном условии, что среднее значение функции  $g(\varphi(t, x, y))$  по  $t$  равно нулю.

Если  $p = 1$ , то делая замены  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow -t$ , и учитывая свойства функций  $A$ ,  $g$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} |T_g^y f(x)| d\nu_\lambda(x) &\leq \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{|f(A)|(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ |f(-A)|(1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y)))\} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \\ &+ \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{|f(A)|(1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ |f(-A)|(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y)))\} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |f(A)| dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \leq \int_0^\infty |f(x)| d\nu_\lambda(x)$$

(см., например, [81]), то

$$\|T_g^y f\|_{1, d\mu_{k,a}} \leq \int_0^\infty |f(x)| d\mu_{k,a}(x) + \int_0^\infty |f(-x)| d\mu_{k,a}(x) = \|f\|_{1, d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора  $\tilde{T}_g^y f$ .

По интерполяционной теореме Рисса–Торина неравенства (4.22), (4.23) выполнены для всех  $1 \leq p \leq \infty$ .

Если  $\psi(x, y)$  — четная относительно  $y$ , то при замене  $y \rightarrow -y$ ,  $t \rightarrow -t$ , интегралы (4.20), (4.21) не изменятся, поэтому  $T_g^{-y} = T_g^y$ ,  $\tilde{T}_g^{-y} = \tilde{T}_g^y$ . Лемма 1 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau = \begin{cases} 1 + 3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 4, & \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Для линейных операторов (4.17), (4.18) справедливы оценки

$$|\tau_1^y f(x)| \leq \frac{1}{2} (1 + 3d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$\begin{aligned}
|\tau_1^y f(x)| &\leq 2 \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0, \\
|T_1^y f(x)| &\leq \frac{1}{2}(1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0, \\
|T_1^y f(x)| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ |f(A)| \left( 1 + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + |f(-A)| \left( 1 - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left( \frac{x - yt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

На подпространстве четных функций

$$\begin{aligned}
|\tau_1^y f(x)| &\leq (1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 |f(A)| dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0. \\
|\tau_1^y f(x)| &\leq \int_{-1}^1 |f(A)| (1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 1 для  $g(t) = 0$ ,  $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$ ,  $\psi(x, y) = \operatorname{sign} x$ ,  $\operatorname{sign}(xy)$ ,  $\varphi(t, x, y) = t$ ,  $(x - yt)/A$ , и учитывая (4.16), приходим к следующему утверждению.

**ТЕОРЕМА 2.** *Для всех  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > -1/2$ , линейные операторы (4.17) и (4.18) ограничены в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^\tau, \quad \|T_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^T. \quad (4.24)$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^T.$$

Оценки  $L^p$ -норм оператора обобщенного сдвига для  $(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье, аналогичного оператору  $\tau^y$ , при  $\lambda \geq 0$  получены в [75].

**ЛЕММА 2.** *Линейные операторы (4.9) и (4.17), а также (4.10) и (4.18), как операторы из  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  в  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ , совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $R > 0$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,

$$S_R(x, f) = \int_{-R}^R \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) e_{r, \lambda}(xz) d\nu_\lambda(z)$$

— частичный интеграл для  $f(x)$ . Согласно (4.14), (4.17)  $\tau_1^y e_{r, \lambda}(xz) = e_{r, \lambda}(xz) e_{r, \lambda}(yz)$ , поэтому

$$\begin{aligned}
\tau_1^y S_R(x, f) &= \int_{-R}^R \tau_1^y e_{r, \lambda}(xz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) \\
&= \int_{-R}^R e_{r, \lambda}(xz) e_{r, \lambda}(yz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) = \tau^y S_R(x, f).
\end{aligned}$$

Из ограниченности операторов  $\tau_1^y$ ,  $\tau^y$  в  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $\tau_1^y f(x) = \tau^y f(x)$ . Случай операторов (4.10) и (4.18) разбирается аналогично. Лемма 2 доказана.

Таким образом, операторы (4.17), (4.18) являются продолжениями операторов (4.9), (4.10) на пространства  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $p \neq 2$ . В дальнейшем операторы (4.17), (4.18) будем обозначать  $\tau^y$ ,  $T^y$  соответственно. В силу (4.10) оператор  $T^y$  четный относительно  $y$ .

**ТЕОРЕМА 3.** *Для всех  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda > -1/2$ , справедливы оценки*

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\nu_\lambda(y) \right)^{1/p} \leq (1 + d_{2r, \lambda_0}) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0, \quad (4.25)$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\nu_\lambda(y) \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.26)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для  $x \in \mathbb{R}$  рассмотрим линейный оператор  $B^x f(y) = T^y f(x)$ . Неравенство (4.25) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)| \leq \frac{1}{2} (1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0,$$

и леммы 1.

При  $\lambda \geq 0$  применяем интерполяционную теорему Рисса–Торина. Как и в лемме 2,  $\|B^x f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , поэтому достаточно доказать (4.26) для  $p = 1$ . Так как  $T^{-y} = T^y$ , то

$$\|B^x f\|_{1, d\nu_\lambda} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\nu_\lambda(y) : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g - \text{четная} \right\}.$$

Применяя равенство Планшереля и (4.9), (4.10), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\nu_\lambda(y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) \overline{e_{r, \lambda}(xz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(g)(z)} d\nu_\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\tau^x g(y)} d\nu_\lambda(y), \end{aligned}$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1, d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{1, d\nu_\lambda} \sup \{ \|\tau^x g(y)\|_\infty : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g - \text{четная} \}.$$

Если  $\|g\|_\infty \leq 1$ , то согласно (4.19)

$$\|\tau^x g(t)\|_\infty \leq \int_{-1}^1 (1 - P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t) = 1$$

и неравенство (4.26) при  $p = 1$  выполнено. Теорема 3 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига. Далее до конца статьи  $\lambda > -1/2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** *Для операторов обобщенного сдвига  $\tau^y$ ,  $T^y$  справедливы следующие*

щие свойства:

- 1) если  $\lambda \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0$ , то  $T^y f(x) \geq 0$ ;
- 2)  $\tau^0 f(x) = T^0 f(x) = f(x)$ ;
- 3)  $\tau^y 1 = T^y 1 = 1$ ;
- 4)  $\tau^y e_{r,\lambda}(xz) = e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz)$ ,  $T^y e_{r,\lambda}(xz) = j_\lambda(yz)e_{r,\lambda}(xz)$ ;
- 5) если  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x)g(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\tau^{-y}g(x) d\nu_\lambda(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x)g(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)T^y g(x) d\nu_\lambda(x);$$

- 6) если  $f \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^t f(x)d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_\lambda(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^t f(x)d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_\lambda(x);$$

- 7) если  $\delta > 0$ ,  $\text{supp } f \subset [-\delta, \delta]$ ,  $|y| \leq \delta$ , то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-|y| - \delta, |y| + \delta],$$

если  $|y| > \delta$ , то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-|y| - \delta, -|y| + \delta] \cup [ |y| - \delta, |y| + \delta].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится как в [73].

### 4.3. Свертки

С помощью операторов  $\tau^y$  и  $T^y$  определим две свертки

$$(f *_{\tau} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x g(y) d\nu_\lambda(y), \quad (4.27)$$

$$(f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x)g(y) d\nu_\lambda(y). \quad (4.28)$$

В (4.28) предполагается, что функция  $g(x)$  четная.

Приведем без доказательств некоторые свойства свертки. Доказательства проводятся как в [73]. Для свертки справедливы неравенства Юнга.

ТЕОРЕМА 4. Пусть  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $1/p + 1/q \geq 1$  и  $1/s = 1/p + 1/q - 1$ . Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ , то

$$\|(f *_{\tau} g)\|_{s, d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g\|_{q, d\nu_\lambda}, \quad (4.29)$$

$$\|(f *_{T} g_e)\|_{s, d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g_e\|_{q, d\nu_\lambda}. \quad (4.30)$$

При доказательстве неравенств (4.29) и (4.30) используются оценки (4.24).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если  $f \in \mathcal{A}$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  и  $g$  — четная, то для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$(f *_{\tau} g)(x) = (f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x)g(y) d\nu_\lambda(y), \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}_r^\lambda(f *_\tau g)(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(f *_T g)(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(f)(y)\mathcal{F}_r^\lambda(g)(y).$$

Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то  $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$  почти всюду.

#### 4.4. Обобщенные средние. $L^p$ -сходимость

В этой секции мы следуем [73]. Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)$ ,  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$ . Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = 1.$$

Под  $L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  далее будем понимать  $C_0(\mathbb{R})$ . Для  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , с помощью свертки (4.27) определим  $(r, \lambda)$ -обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y). \quad (4.32)$$

Функцию  $\varphi$  назовем генератором обобщенных средних (4.32). Если функция  $\varphi(x)$  — четная, то согласно предложению 4 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = \Phi_\varepsilon^T f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = 2 \int_0^\infty T^y f(x)\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y).$$

При рассмотрении средних  $\Phi_\varepsilon^T f(x)$  будем всегда предполагать, что генератор четный. В силу (4.29), (4.30)

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} \leq M_{r, \lambda}^\tau \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1, d\nu_\lambda} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad (4.33)$$

$$\|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p, d\nu_\lambda} \leq M_{r, \lambda}^T \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1, d\nu_\lambda} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}. \quad (4.34)$$

Исследуем  $L^p$ -сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau^y f - f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leq \delta} \|T^y f - f\|_{p, d\nu_\lambda}$$

— модули непрерывности функции  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

ЛЕММА 3. Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} \leq (1 + M_{r, \lambda}^\tau) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} \leq (1 + M_{r, \lambda}^T) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad (4.35)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = 0. \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (4.24), получим (4.35). Равенство (4.36) докажем для модуля непрерывности  $\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda}$ . Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для  $f, g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$|\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} - \omega_\tau(\delta, g)_{p, d\nu_\lambda}| \leq (1 + M_{r, \lambda}^\tau) \|f - g\|_{p, d\nu_\lambda},$$

равенство (4.36) можно доказывать для функций из плотного множества  $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ .



Пусть  $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ . Для функции Бесселя  $j'_\lambda(z) = -zj_{\lambda+1}(z)/(2(\lambda+1))$ , поэтому  $|j_\lambda(z) - 1| \leq |z|/(2(\lambda+1))$  и из (8)  $|e_{r,\lambda}(y, z) - 1| \lesssim |yz|$ .

Так как  $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)$  быстро убывает на бесконечности, то согласно (4.9) и ограниченности  $M_{r,\lambda}$

$$\begin{aligned} |\tau^y f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |e_{r,\lambda}(xz)| |e_{r,\lambda}(yz) - 1| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |e_{r,\lambda}(yz) - 1| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda(z) \lesssim \int_{\mathbb{R}} |yz| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda \lesssim |y|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Отсюда вытекает (4.36) при  $p = \infty$ .

Рассмотрим случай  $p < \infty$ . Так как из (9) и (4.8) для всех  $y$  произведение  $e_{r,\lambda}(yz)f(z) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ , то по теореме 1  $\tau^y f(x) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ . Получим равномерные оценки по  $y$ . Для любого натурального  $m$ ,  $(\Delta_{r,\lambda})_z^m (e_{r,\lambda}(yz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z))$  является конечной линейной комбинацией функций вида

$$|y|^{\alpha_s} j_{\lambda+s}(yz) f_s(z), \quad |y|^{\beta_s} \text{sign} y j_{\lambda+s}(yz) g_s(z), \quad \alpha_s, \beta_s \geq 0, \quad f_s, g_s \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}),$$

и согласно предложению 2 равномерно по  $|y| \leq 1$

$$|\tau^y f(x)| \lesssim |x|^{-2m}, \quad |f(x)| \lesssim |x|^{-2m}.$$

Отсюда и из (4.37) для  $R > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau^y f(x) - f(x)|^p d\nu_\lambda(x) \lesssim |y|^p \int_{-R}^R d\nu_\lambda + \int_{|x| \geq R} |x|^{-2mp} d\nu_\lambda(x).$$

Следовательно, (4.36) выполнено. Лемма 3 доказана.

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi)$ , функции  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(0) = 1$ . Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  при  $1 \leq p < \infty$  или  $f \in C_0(\mathbb{R})$  при  $p = \infty$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - \Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} = 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учитывая (4.33) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 5 достаточно доказывать на плотном множестве  $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ . Если  $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ , то в силу (4.31)

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_{\tau} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) \right\|_{p, d\nu_\lambda} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)\|_{p, d\nu_\lambda} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\nu_\lambda(y) \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\nu_\lambda} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\nu_\lambda(y). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 6 вытекает из (4.35), (4.36) и оценки

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \omega_{\tau}(\varepsilon y, f)_{p, d\nu_{\lambda}} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y) \\ & \leq \omega_{\tau}(\varepsilon R, f)_{p, d\nu_{\lambda}} \int_{|y| \leq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y) + (1 + M_{r, \lambda}^{\tau}) \|f\|_{p, d\nu_{\lambda}} \int_{|y| \geq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y). \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы 5 функция  $\varphi$  — четная, то, учитывая неравенство (4.34),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - \Phi_{\varepsilon}^T f\|_{p, d\nu_{\lambda}} = 0.$$

Обобщенные средние  $\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f$ , для которых имеет место сходимость в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , назовем регулярными.

В [82] рассмотрены следующие примеры средних для преобразования Данкля с четными генераторами: средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Они будут примерами средних и для обобщенного преобразования Ганкеля, как и для обобщенного преобразования Данкля [73]. Для обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса  $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) = e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ . Для обобщенных средних Пуассона

$$\varphi(x) = e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda}), \quad \widehat{\varphi}(y) = \frac{c_{\lambda}}{(1 + y^2)^{\lambda+3/2}} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda}).$$

Таким образом, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса и Пуассона являются регулярными. Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^{\delta}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda, \delta} j_{\lambda+\delta+1}(y), \quad \delta > 0.$$

Генератор  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ . Так как  $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1 + |y|)^{-(\lambda+\delta+3/2)}$ , то  $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ , если только  $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$ . Число  $\delta_0$  называют критическим показателем. Если  $\delta > \delta_0$ , то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

## 4.5. Обобщенные средние. Сходимость почти всюду

Пусть  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f(x)$  — обобщенные средние (4.32),

$$\Phi^{\tau} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f(x)|$$

— мажоранта обобщенных средних,

$$d_f(\alpha) = \int_{\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| > \alpha\}} d\nu_{\lambda}(x)$$

— функция распределения  $f$ ,  $L^{p, \infty}(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$  — множество измеримых функций, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p, \infty, d\nu_{\lambda}} = \sup\{\alpha(d_f(\alpha))^{1/p} : \alpha > 0\}$$

(неравенство треугольника выполняется с константой, большей единицы [83, Sect. 1.4.1]).

Пространство  $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  называют слабым  $L^p$ -пространством, так как имеет место строгое вложение  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  и  $\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{p,d\nu_\lambda}$ .

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних  $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$  будем опираться на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [83, Theorem 2.1.14]).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ , множество  $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  плотно в  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ . Если для любой  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$  выполнено неравенство

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \quad (4.38)$$

и для любой  $f \in D$  обобщенные средние  $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$  сходятся к  $f(x)$  почти всюду, то они сходятся к  $f(x)$  почти всюду для любой  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ .

Неравенство (4.38) называют слабым  $L^p$ -неравенством. По теореме 6 в качестве множества  $D$  можно взять  $C_0(\mathbb{R})$ . В этом случае будет иметь место даже равномерная сходимость. Для доказательства неравенства (4.38) нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть  $\chi_E(x)$  — характеристическая функция множества  $E \subset \mathbb{R}$ . Для функции  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  и  $(r, \lambda)$ -обобщенного преобразования Ганкеля максимальную функцию  $\mathcal{M}_{r,\lambda}f$  определим с помощью свертки (4.27)

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)}.$$

Применяя предложение 4 и четность оператора  $T^y$  по  $y$ , получим

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)} = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_0^\infty T^y f(x) \chi_{[0,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_0^\infty \chi_{[0,s]}(y) d\nu_\lambda(y)}.$$

**ЛЕММА 4.** Если  $\lambda, y \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\varphi(x)$  — четный генератор, справедлива оценка  $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+y)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$  и  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\nu_\lambda)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то для почти всех  $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi^\tau f(x) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно предложениям 3, 4,  $T^y$  — положительный оператор и для почти всех  $x$ ,  $(f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$ . Отсюда  $|T^y f(x)| \leq T^y|f|(x)$  и

$$\Phi^\tau f(x) = \Phi^T f(x) \leq \sup_{\varepsilon>0} (|f| *_T |\widehat{\varphi}_\varepsilon|)(x), \quad \mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) \leq \mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

Следовательно, мы можем далее считать, что  $f(x), \widehat{\varphi}(y) \geq 0$ .

Используя разложение

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) \chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1}]}(y)$$

и равенство  $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)} \widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y)$ , получим

$$\int_0^\infty T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) \chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1}]}(y) d\nu_\lambda(y)$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1+2^j)^{-\gamma} \left( \frac{2^j}{1+2^j} \right)^{2(\lambda+1)} \frac{\int_0^{\infty} T^y f(x) \chi_{[0, \varepsilon 2^{j+1}]}(y) d\nu_{\lambda}(y)}{\int_0^{\infty} \chi_{[0, \varepsilon 2^{j+1}]}(y) d\nu_{\lambda}(y)} \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-\gamma j} + 2^{-2(\lambda+1)j}) \mathcal{M}_{r, \lambda} f(x) \lesssim \mathcal{M}_{r, \lambda} f(x).
\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда  $M_{k, a} f$  обобщенного преобразования Фурье при  $a = \frac{1}{r}$  справедливо слабое  $L^1$ -неравенство и сильное  $L^p$ -неравенство при  $1 < p < \infty$  [84]. С помощью замен переменных (7) убеждаемся, что аналогичные утверждения справедливы и для максимальной функции Харди–Литтлвуда  $\mathcal{M}_{r, \lambda} f$  обобщенного преобразования Ганкеля. Следовательно, в условиях леммы 4 для мажоранты обобщенных средних  $\Phi^{\tau} f$  справедливо неравенство (4.38) и мы приходим к следующему утверждению.

**ТЕОРЕМА 6.** Пусть  $\lambda \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ , четные функции  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(0) = 1$ , и  $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1 + |y|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ . Если  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то почти всюду

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}^{\tau} f(x) = f(x).$$

Учитывая оценки для обобщенных преобразований Ганкеля генераторов обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса при  $\delta > \delta_0$ , мы получаем их сходимость почти всюду для функций из  $L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , если  $\lambda = r(2k - 1) \geq 0$  или  $k \geq 1/2$ .

## 4.6. Приложение

В этой секции дается простое доказательство теоремы умножения Boubatra–Negzaoui–Sifi [75] для нормированных функций Бесселя, используемой при получении интегрального представления операторов обобщенного сдвига для  $(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье, обобщенного преобразования Данкля и обобщенного преобразования Ганкеля.

**ТЕОРЕМА 7.** Если  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > -1/2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $|t| \leq 1$ ,  $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$ , то

$$x^n j_{\lambda+n}(x) j_{\lambda}(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+n}(A) A^n P_n^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) dm_{\lambda}(t). \quad (4.39)$$

При  $n = 0$ ,  $P_0^{(\lambda-1/2)}(t) = 1$ , получается известная теорема умножения Гегенбауэра [78, Chap. XI, 11.41]:

$$j_{\lambda}(x) j_{\lambda}(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda}(A) dm_{\lambda}(t), \quad (4.40)$$

которая позволяет записать оператор обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) dm_{\lambda}(t)$$

для преобразования Ганкеля

$$\mathcal{H}_{\lambda}(f)(y) = 2 \int_0^{\infty} f(x) j_{\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(x).$$

При  $n = 1$ ,  $P_1^{(\lambda-1/2)}(t) = t$ , получается теорема умножения

$$xj_{\lambda+1}(x)j_{\lambda}(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+1}(A)(x - yt) dm_{\lambda}(t), \quad (4.41)$$

которая вместе с теоремами умножения Гегенбауэра (4.40) и

$$xyj_{\lambda+1}(x)j_{\lambda+1}(y) = 4(\lambda + 1)^2 \int_{-1}^1 j_{\lambda+1}(A)t dm_{\lambda}(t)$$

позволяет получить интегральное представление оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left( 1 + \frac{x+y}{A} \right) + f(-A) \left( 1 - \frac{x+y}{A} \right) \right\} (1-t) dm_{\lambda}(t)$$

для одномерного преобразования Данкля (см., например, [85]).

Формула (4.41) получается дифференцированием по  $x$  обеих частей равенства (4.40). И в общем случае искомую теорему умножения будем доказывать по индукции, дифференцируя (4.39) и используя следующие свойства нормированных функций Бесселя  $j_{\lambda}(x)$

$$j'_{\lambda}(x) = -\frac{x}{2(\lambda + 1)} j_{\lambda+1}(x), \quad (4.42)$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda + 1)(\lambda + 2)} j_{\lambda+2}(x) = j_{\lambda+1}(x) - j_{\lambda}(x), \quad (4.43)$$

и многочленов Гегенбауэра

$$(P_n^{(\lambda-1/2)}(x))' = \frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1} P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x), \quad (4.44)$$

$$(n+2\lambda)P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x) = 2(n+\lambda)xP_n^{(\lambda-1/2)}(x) - nP_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x), \quad (4.45)$$

$$(1-t^2)P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x) = \frac{2\lambda+1}{2(n+\lambda)} \left( P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x) - P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x) \right). \quad (4.46)$$

Равенство (4.44) и рекуррентное соотношение (4.45) можно найти в [86, Chap. 4, 4.7], [87, Lecture 1, 1.5]. Соотношение (4.46) и даже в более общем виде для многочленов Якоби имеется в [86, Chap. 4, 4.5].

Нам понадобится еще одно свойство из [75], для которого мы также приведем более простое доказательство. Отметим, что  $A' = A'_x = (x - ty)/A$ .

ЛЕММА 5. Для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$(A^n P_n^{(\lambda-1/2)}(A'))' = nA^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A'). \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для производных по  $x$

$$(A')^2 + AA'' = (AA')' = (x - ty)' = 1,$$

то согласно (4.44)–(4.46)

$$(A^n P_n^{(\lambda-1/2)}(A'))' = nA^{n-1} A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1} A^n A'' P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A')$$

$$\begin{aligned}
&= nA^{n-1} \left\{ A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n+2\lambda}{2\lambda+1} (1-(A')^2) P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A') \right\} \\
&= nA^{n-1} \left\{ \frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)} P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n}{2(n+\lambda)} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)} \left( P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') - P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right) \right\} = nA^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A').
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.** Доказательство теоремы будем вести индукцией по  $n$ . При  $n = 0, 1$  (4.40) верно. Пусть (4.39) верно для всех параметров меньше или равных  $n$ . Продифференцируем обе части равенства (4.40) по  $x$ .

Для производной левой части в силу (4.42), (4.43), получим

$$\begin{aligned}
&(x^n j_{\lambda+n}(x) j_\lambda(x))' = nx^{n-1} j_{\lambda+n}(x) j_\lambda(y) - \frac{x^{n+1}}{2(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y) \\
&= nx^{n-1} \left( j_{\lambda+n-1}(x) - \frac{x^2 j_{\lambda+n+1}(x)}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} \right) j_\lambda(y) - \frac{x^{n+1} j_{\lambda+n+1}(x)}{2(\lambda+n+1)} j_\lambda(y) \\
&= nx^{n-1} j_{\lambda+n-1}(x) j_\lambda(y) - \frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Применяя для производной подинтегральной функции в правой части последовательно (4.43), (4.47), (4.45) и (4.44), получим

$$\begin{aligned}
&(j_{\lambda+n}(A) A^n P_n^{\lambda-1/2}(A'))' = -\frac{A^{n+1}}{2(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&+ n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') = -\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&\quad - \frac{nA^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') + n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&\quad = -\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&\quad - nA^{n-1} (j_{\lambda+n}(A) - j_{\lambda+n-1}(A)) P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') + n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&= n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') - \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A').
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.47), (4.48)

$$\begin{aligned}
&nx^{n-1} j_{\lambda+n-1}(x) j_\lambda(y) - \frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y) \\
&= \int_{-1}^1 \left\{ n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right\} dm_\lambda(t).
\end{aligned}$$

В силу индуктивного предположения

$$x^{n+1} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+n+1}(A) A^{n+1} P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') dm_\lambda(t).$$

Теорема 7 доказана.

## 4.7. Некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье

Преобразование  $\mathcal{F}_{k,a}$  (10) унитарный оператор [90, гл. 5] и для  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) \overline{\mathcal{F}_{k,a}(g)(y)} d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\mu_{k,a}(x). \quad (4.1)$$

Напомним, что  $\lambda = (2k - 1)/a$ . Из асимптотики функции Бесселя [98, гл. 7, 7.1]

$$|B_{k,a}(x, y)| \lesssim \frac{1}{(1 + |xy|)^{\lambda+1/2}}.$$

Равномерная норма ядра (11) конечна, если только  $\lambda \geq -1/2$ :

$$M_{k,a} = \|B_{k,a}(x, y)\|_{\infty} = \|b_{k,a}(x)\|_{\infty} < \infty.$$

**ТЕОРЕМА 23.** *Если  $a > 0$ ,  $f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ , то  $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ ,  $\delta_{k,a}f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $a > 0$ ,  $f(x) = F(|x|^{a/2})$ ,  $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $F$  — четная. Применяя (10), (11), делая замену переменной  $x^{a/2} = au/2$ , и учитывая, что  $\mathcal{F}_{k,2}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) &= 2 \int_0^{\infty} F(x^{a/2}) j_{\lambda} \left( \frac{2}{a} |xy|^{a/2} \right) d\mu_{k,a}(x) = \\ &= 2c_{k,a} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \int_0^{\infty} F\left(\frac{a}{2}u\right) j_{\lambda}(|y|^{a/2}u) u^{2\lambda+1} du = \\ &= c_{k,a} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{a}{2}u\right) j_{\lambda}(|y|^{a/2}u) |u|^{2\lambda+1} du = \\ &= \frac{c_{k,a}}{c_{k,2}} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \mathcal{F}_{k,2} \left( F\left(\frac{a}{2}\cdot\right) \right) (|y|^{a/2}) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Аналогично, если  $f(x) = xF(|x|^{a/2})$ , то, полагая  $k_1 = k + 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda + 2/a = (2k_1 - 1)/a$ , получим

$$\begin{aligned} &2y \int_0^{\infty} x^2 F(x^{a/2}) j_{\lambda+\frac{2}{a}} \left( \frac{2}{a} |xy|^{a/2} \right) d\mu_{k,a}(x) = \\ &= 2c_{k,a} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \int_0^{\infty} F\left(\frac{a}{2}u\right) j_{\lambda_1}(|y|^{a/2}u) u^{2\lambda_1+1} du \\ &= c_{k,a} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{a}{2}u\right) j_{\lambda_1}(|y|^{a/2}u) |u|^{2\lambda_1+1} du = \frac{c_{k,a}}{c_{k_1,2}} \left( \frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \mathcal{F}_{k_1,2} \left( F\left(\frac{a}{2}\cdot\right) \right) (|y|^{a/2}), \end{aligned}$$

поэтому  $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ .

Пусть  $f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2})$ ,  $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $F_1, F_2$  — четные. Имеем

$$f'(x) = \frac{a}{2} x |x|^{a-2} \left\{ \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + x \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} \right\} + F_2(|x|^{a/2}),$$

$$f''(x) = \frac{a}{2} |x|^{a-2} \left\{ \left[ \left( \frac{a}{2} - 1 \right) \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2} F_1''(|x|^{a/2}) \right] + x \left[ \left( \frac{a}{2} + 1 \right) \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2} F_2''(|x|^{a/2}) \right] \right\}.$$

Так как [89, theorem 2.13]

$$\Delta_k f(x) = f''(x) + \frac{2k}{x} f'(x) - \frac{k}{x^2} (f(x) - f(-x)) = f''(x) + \frac{2k}{x} (f'(x) - F_2(|x|^{a/2})),$$

то

$$\begin{aligned} \delta_{k,a} f(x) &= |x|^{2-a} \Delta_k f(x) = \frac{a}{4} \left\{ (4k + a - 2) \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + a F_1''(|x|^{a/2}) \right. \\ &\quad \left. + x \left( (4k + a + 2) \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + a F_2''(|x|^{a/2}) \right) \right\} \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Теорема 23 доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R}), \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$  — подмножества четных и нечетных функций, то  $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})$  и  $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})$ .

Пусть

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f, \mathcal{F}_{k,a}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})\}. \quad (4.2)$$

Из теоремы 23 вытекает следствие.

**Следствие 1.** Для  $a > 0$  справедливо вложение  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{k,a}$ .

В [90, гл. 5] многие свойства преобразования  $\mathcal{F}_{k,a}$  устанавливаются на некотором подмножестве, плотном в  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ . По теореме 23 в качестве такого подмножества можно взять класс  $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ . Например, если  $f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} (\delta_{k,a})^n f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x) = (-1)^n |y|^{an} \int_{\mathbb{R}} f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x), \quad (4.3)$$

откуда

$$(\delta_{k,a})_x B_{k,a}(x, y) = -|y|^a B_{k,a}(x, y).$$

Если  $f, g \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \delta_{k,a} f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_{k,a} g(x) d\mu_{k,a}(x).$$

## 4.8. Операторы обобщенного сдвига

Пусть  $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$  — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1 - t^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , и нормированные условием  $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$ ,

$$d_{n,\alpha} = \max_{[-1,1]} |P_n^{(\alpha)}(t)|. \quad (4.1)$$

При  $\alpha \geq -1/2$ ,  $d_{n,\alpha} = 1$  (см., например, [91]). С многочленами Гегенбауэра  $C_n^\lambda(t)$ , ортогональными с весом  $(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$  (см. [99, гл. 10, 10.9]),  $\lambda > -1/2$ , многочлены  $P_n^{(\alpha)}(t)$  связаны соотношениями

$$C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda)} P_n^{(\lambda-1/2)}(t) \text{ при } \lambda \neq 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} C_n^\lambda(t) = \frac{2}{n} P_n^{(-1/2)}(t). \quad (4.2)$$



Для удобства далее будем использовать обозначение  $\lambda_0 = \lambda - 1/2$ .

Пусть  $\lambda > -1/2$ ,  $dm_\lambda(t) = c_\lambda(1-t^2)^{\lambda_0} dt$  — вероятностная мера на отрезке  $[-1, 1]$ ,

$$c_\lambda^{-1} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda_0} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}. \quad (4.3)$$

Пусть  $a = 1/r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ ,  $\lambda = r(2k-1) > -1/2$ . Ядро обобщенного оператора Фурье (10) может быть записано в виде

$$B_{k,a}(x, y) = b_{k,a}(xy) = j_\lambda(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}) + \frac{(-1)^r r^{2r}}{(\lambda+1)_{2r}} xy j_{\lambda+2r}(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}).$$

Приведем некоторые его свойства. Известно [91], что

$$B_{k,a}(x, y) = \int_{-1}^1 (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) e^{-2ri|xy|^{\frac{1}{2r}}t} dm_\lambda(t). \quad (4.4)$$

Из (4.1) и (4.4) вытекают оценки

$$M_{k,a} \leq 1 + d_{2r, \lambda_0}, \quad -1/2 < \lambda < 0, \quad M_{k,a} = 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.5)$$

Обратное преобразование имеет вид  $(\mathcal{F}_{k,a})^{-1} = \mathcal{F}_{k,a}$  (см. [90, теорема 5.3]). Равенство

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(y)$$

справедливо не только в  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ , но и поточечно, если  $f \in \mathcal{A}_{k,a}$  (4.2).

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|t| \leq 1$ ,

$$A_n = A_n(x, y, t) = \sqrt{|x|^{\frac{2}{n}} + |y|^{\frac{2}{n}} - 2|xy|^{\frac{1}{n}}t}, \quad B_n(x, y, t) = \frac{|x|^{\frac{1}{n}} - |y|^{\frac{1}{n}}t}{A_n(x, y, t)}. \quad (4.6)$$

Функции  $A_n(x, y, t)$ ,  $B_n(x, y, t)$  — четные по  $x$  и  $y$  и

$$1 - B_n^2(x, y, t) = \frac{(1-t^2)|y|^{\frac{2}{n}}}{A_n^2(x, y, t)} \geq 0, \quad |B_n(x, y, t)| \leq 1. \quad (4.7)$$

Первое интегральное представление оператора обобщенного сдвига  $\tau^y$  (14) получено в [94]. Удобное для нас представление получено в [95, 96]. Заменяя в нем многочлены Гегенбауэра  $C_{2r}^\lambda(t)$  на многочлены  $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$  по формуле (4.2), придем к более простому и компактному виду

$$\begin{aligned} \tau^y f(x) &= \int_{-1}^1 \left\{ (f(A_{2r}^{2r}))_e (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) \right. \\ &\quad \left. + ((f(A_{2r}^{2r}))_0 (\text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)) + \text{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t)))) \right\} dm_\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A_{2r}^{2r}) (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) + \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)) + \text{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t))) \right\} \end{aligned}$$

$$+f(-A_{2r}^{2r})(1+\text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)-\text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t))-\text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t)))\} dm_\lambda(t). \quad (4.8)$$

На четных функциях

$$\tau^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_{2r}^{2r})(1+\text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t). \quad (4.9)$$

Интегральное представление оператора обобщенного сдвига  $T^y$  получаем из (15) и (4.8)

$$T^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{f(A_{2r}^{2r})(1+\text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t))) + f(-A_{2r}^{2r})(1-\text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)))\} dm_\lambda(t). \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) вытекает, что оператор  $\tau^y$  на четных функциях и оператор  $T^y$  при  $\lambda \geq 0$  положительные и  $T^{-y} = T^y$  при  $\lambda > -1/2$ .

Пусть функция  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  — измеримая по Борелю, функция  $\psi(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  — нечетная по  $x$ , функция  $\varphi(t, x, y): [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  — четная по  $x$  и  $y$ , функции  $\psi, \varphi$  — измеримые по Лебегу, и линейные операторы  $T_g^y, \tilde{T}_g^y, T_0^y$ , определены равенствами

$$T_g^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{f(A_n^n)(1+\psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + f(-A_n^n)(1-\psi(x, y)g(\varphi(t, x, y)))\} dm_\lambda(t), \quad (4.11)$$

$$\tilde{T}_g^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_n^n)(1+\psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) dm_\lambda(t), \quad T_0^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_n^n) dm_\lambda(t). \quad (4.12)$$

**Лемма 1.** Если  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda = n(2k - 1)/2$ ,  $u f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu_{k,a})$ , то

$$\int_0^\infty |T_0^y f(x)| x^{2k+2/n-2} dx \leq \int_0^\infty |f(x)| x^{2k+2/n-2} dx.$$

**Доказательство.** Так как  $|T_0^y f(x)| \leq T_0^y |f|(x)$ , то можно считать  $f(x) \geq 0$ . Имеем

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = c_\lambda \int_0^\infty \int_{-1}^1 f\left(\left(x^{\frac{2}{n}} + y^{\frac{2}{n}} - 2(xy)^{\frac{1}{n}} t\right)^{n/2}\right) (1-t^2)^{\lambda-1/2} x^{2k+2/n-2} dt dx.$$

Делая замену переменной  $A_n(x, y, t) = z^{1/n}$  (4.6), получим

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) K^\lambda\left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, z^{\frac{1}{n}}\right) z^{2k+2/n-2} dz x^{2k+2/n-2} dx,$$

где

$$K^\lambda(u, v, w) = c_\lambda \frac{(((u+v)^2 - w^2)(w^2 - (u-v)^2))^{\lambda-1/2}}{2^{2\lambda-1}(uvw)^{2\lambda}}$$

и носитель функции  $K^\lambda(u, v, w)$ , как функции  $w$ , лежит на отрезке  $[|u-v|, u+v]$ . Так как  $K^\lambda(u, v, w) = K^\lambda(w, v, u)$ , то

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) K^\lambda\left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, z^{\frac{1}{n}}\right) z^{2k+2/n-2} dz x^{2k+2/n-2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^\infty K^\lambda(z^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{n}}) x^{2k+2/n-2} dx \int_0^\infty f(z) z^{2k+2/n-2} dz.$$

Заменяя  $z = u^n$ ,  $y = v^n$ ,  $x = w^n$ , получим

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty K^\lambda(z^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{n}}) x^{2k+2/n-2} dx = \int_0^\infty K^\lambda(u, v, w) w^{2\lambda+1} dw = 1$$

(см., например, [94]). Следовательно,

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = \int_0^\infty f(z) z^{2k+2/n-2} dz.$$

Лемма 1 доказана.

Для  $n = 1$  лемма 1 хорошо известна (см., например, [100]).

**Лемма 2.** Для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $y \in \mathbb{R}$  операторы  $T_g^y f(x)$ ,  $\tilde{T}_g^y f(x)$  положительные. Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то

$$\|T_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}, \quad (4.13)$$

если дополнительно для всех  $x, y$ ,  $\int_{-1}^1 g(\varphi(t, x, y)) dm_\lambda(t) = 0$ , то

$$\|\tilde{T}_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}. \quad (4.14)$$

Если функция  $\psi(x, y)$  четная по  $y$ , то и операторы  $T_g^y$ ,  $\tilde{T}_g^y$  четные по  $y$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $f(x) \geq 0$ , то  $T_g^y f(x) \geq 0$ ,  $\tilde{T}_g^y f(x) \geq 0$ . Если  $p = \infty$ , то согласно (4.3)

$$\begin{aligned} & \|T_g^y f\|_\infty \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_x \int_{-1}^1 \{ (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t) \|f\|_\infty = \\ & = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора  $\tilde{T}_g^y f$  при дополнительном условии, что среднее значение функции  $g(\varphi(t, x, y))$  по  $t$  и мере  $dm_\lambda$  равно нулю.

Если  $p = 1$ , то делая замену  $x \rightarrow -x$  и учитывая свойства функций  $A_n^n$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\infty}^\infty |T_g^y f(x)| d\mu_{k,a}(x) \\ & \leq \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A_n^n)| (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + |f(-A_n^n)| (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} \\ & \quad dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x) \\ & + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A_n^n)| (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + |f(-A_n^n)| (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} \\ & \quad dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x) \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{|f(A_n^n)| + |f(-A_n^n)|\} dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x).$$

Применяя лемму 1, получим

$$\|T_g^y f\|_{1, d\mu_{k,a}} \leq \int_0^\infty |f(x)| d\mu_{k,a}(x) + \int_0^\infty |f(-x)| d\mu_{k,a}(x) = \|f\|_{1, d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора  $\tilde{T}_g^y f$ . По интерполяционной теореме Рисса–Торина неравенства (4.13), (4.14) выполнены для всех  $1 \leq p \leq \infty$ .

Если  $\psi(x, y)$  — четная относительно  $y$ , то при замене  $y \rightarrow -y$ , интегралы (4.11), (4.12) не изменятся, поэтому  $T_g^{-y} = T_g^y$ ,  $\tilde{T}_g^{-y} = \tilde{T}_g^y$ . Лемма 2 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau = \begin{cases} 1 + 3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 4, & \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Для линейных операторов (4.8), (4.10) справедливы оценки

$$|\tau^y f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + 3d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|\tau^y f(x)| \leq 2 \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0,$$

$$|T^y f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|T^y f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})|(1 + \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)))$$

$$+ |f(-A_{2r}^{2r})|(1 - \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)))\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.$$

На подпространстве четных функций

$$|\tau^y f(x)| \leq (1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 |f(A_{2r}^{2r})| dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|\tau^y f(x)| \leq \int_{-1}^1 |f(A_{2r}^{2r})|(1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.$$

Применяя лемму 2 для  $g(t) = 0$ ,  $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$ ,  $\psi(x, y) = \text{sign} x$ ,  $\text{sign}(xy)$ ,  $\varphi(t, x, y) = t$ ,  $B_{2r}(x, y, t)$ , и учитывая (4.6) и (4.7), приходим к следующему утверждению.

**ТЕОРЕМА 24.** *Для всех  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > -1/2$ , линейные операторы (4.8) и (4.10) ограничены в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^\tau, \quad \|T^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^T. \quad (4.15)$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^T.$$

Неравенство (4.15) для оператора  $\tau^y$  при  $\lambda \geq 0$  доказано в [94].

ТЕОРЕМА 25. Для всех  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > -1/2$ , справедливы оценки

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/p} \leq (1 + d_{2r,\lambda_0}) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad -1/2 < \lambda < 0, \quad (4.16)$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $u \in \mathbb{R}$  рассмотрим линейный оператор  $B^x f(y) = T^y f(x)$ . Неравенство (4.16) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)| \leq \frac{1}{2} (1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

и лемм 1, 2.

Пусть  $\lambda \geq 0$ . Применяем интерполяционную теорему Рисса–Торина. Как и в лемме 2,  $\|B^x f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , поэтому достаточно доказать (4.17) для  $p = 1$ . Так как  $T^y = T^{-y}$ , то [101, (12.13)]

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\mu_{k,a}(y) : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g - \text{четная} \right\}.$$

Применяя обобщенное равенство Планшереля (4.1) и (14), (15), получим

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \overline{B_{k,a}(x,z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z)} d\mu_{k,a}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\tau^x g(y)} d\nu_\lambda(y),$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{1,d\mu_{k,a}} \sup \{ \|\tau^x g\|_\infty : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g - \text{четная} \}.$$

Если  $\|g\|_\infty \leq 1$  и  $g$  — четная, то согласно теореме 24

$$\|\tau^x g\|_\infty \leq 1, \quad \|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} \leq 1.$$

Теорема 25 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига.

ТЕОРЕМА 26. Для операторов обобщенного сдвига  $\tau^y$ ,  $T^y$  справедливы следующие

свойства:

$$1. \text{ Если } \lambda \geq 0, f(x) \geq 0, \text{ то } T^t f(x) \geq 0. \quad (4.18)$$

$$2. \tau^0 f(x) = T^0 f(x) = f(x), \quad \tau^y f(x) = \tau^x f(y). \quad (4.19)$$

$$3. \tau^t 1 = T^t 1 = 1. \quad (4.20)$$

$$4. \tau^y B_{k,a}(x, z) = B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z), \quad T^y B_{k,a}(x, z) = (B_{k,a}(y, z))_e B_{k,a}(x, z), \\ \mathcal{F}_{k,a}(\tau^y f)(z) = B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z), \quad \mathcal{F}_{k,a}(T^y f)(z) = (B_{k,a}(y, z))_e \mathcal{F}_{k,a}(f)(z). \quad (4.21)$$

5. Если  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tau^y g(x) d\mu_{k,a}, \quad (4.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T^y g(x) d\mu_{k,a}(x). \quad (4.23)$$

6. Если  $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x), \quad (4.24)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x). \quad (4.25)$$

7. Пусть  $\delta > 0$ ,  $\text{supp } f \subset [-\delta, \delta]$ . Если  $|y| \leq \delta$  и  $\delta_1 = (|y|^{\frac{1}{2r}} + \delta^{\frac{1}{2r}})^{2r}$ , то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-\delta_1, \delta_1]. \text{ Если } |y| > \delta \text{ и } \delta_2 = (|y|^{\frac{1}{2r}} - \delta^{\frac{1}{2r}})^{2r}, \text{ то} \\ \text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-\delta_1, -\delta_2] \cup [\delta_2, \delta_1]. \quad (4.26)$$

8. Если  $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ , то для всех  $y$ ,  $\tau^y f, T^y f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . (4.27)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (4.18)–(4.21) получаются из (11), (14), (15), (4.3), (4.8), (4.10). Свойства (4.22), (4.23) вытекают из обобщенного равенства Планшереля (4.1).

Если  $\chi_R(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[-R, R]$ , то  $\lim_{R \rightarrow \infty} \chi_R(x) = 1$  для всех  $x$ , поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости согласно (4.10),  $\lim_{R \rightarrow \infty} T^y \chi_R(x) = 1$  для всех  $x$  и  $y$ . Для любой  $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  по теореме Лебега об ограниченной сходимости при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) d\mu_{k,a}(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) T^y \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x).$$

Но для таких  $f$  по свойству (4.23)

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T^y \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x)$$

и для них свойство (4.25) выполнено. Так как множество  $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  плотно в  $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ , то в силу непрерывности оператора  $T^y$  в  $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  свойство (4.25) выполнено для всех  $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ . Свойство (4.24) для оператора  $\tau^y$  доказывается аналогично.

Свойство (4.26) вытекает из неравенства  $A_{2r}^2(x, y, t) \geq \left| |x|^{\frac{1}{2r}} - |y|^{\frac{1}{2r}} \right|^{2r}$  в (4.8), (4.10).

Пусть  $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . По теореме 23  $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Так как  $z^2 = (|z|^{1/2r})^{4r}$ , то  $z^2 \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$  и  $B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Следовательно, для всех  $y$

$$\tau^y f(x) = \mathcal{F}_{k,a}(B_{k,a}(y, \cdot) \mathcal{F}_{k,a}(f)(\cdot))(x) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R}).$$

Свойство (4.27) для оператора  $T^y$  доказывается аналогично. Теорема 26 доказана.

## 4.9. Свертки

С помощью операторов  $\tau^y$  и  $T^y$  определим две свертки

$$(f *_{\tau} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(y) d\mu_{k,a}(y), \quad (4.1)$$

$$(f *_{T} g_e)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_e(y) d\mu_{k,a}(y). \quad (4.2)$$

**Лемма 3.** Если  $f \in \mathcal{A}_{k,a}$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  и  $g$  — четная, то для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$(f *_{\tau} g)(x) = (f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}_{k,a}(f *_{\tau} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f *_{T} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) \mathcal{F}_{k,a}(g)(y). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.1), (10) и (14)

$$\begin{aligned} (f *_{\tau} g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(y) d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z) d\mu_{k,a}(z). \end{aligned}$$

Согласно теореме 24 и условий леммы все предыдущие интегралы сходятся абсолютно. Аналогично, применяя (4.2) и (15), получим

$$\begin{aligned} (f *_{T} g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} (B_{k,a}(y, z))_e B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z) d\mu_{k,a}(z). \end{aligned}$$

Равенства (4.3) и (4.4) и лемма 3 доказаны.

Для свертки (4.1) докажем неравенство Юнга.

**ТЕОРЕМА 27.** Пусть  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $1/p + 1/q \geq 1$  и  $1/s = 1/p + 1/q - 1$ . Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ , то

$$\|(f *_{\tau} g)\|_{s, d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \|g\|_{q, d\mu_{k,a}}, \quad (4.5)$$

$$\|(f *_{T} g_e)\|_{s, d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \|g_e\|_{q, d\mu_{k,a}}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство можно провести как в [97]. Обычно константа в неравенстве Юнга равна 1. Так как константа в (4.5) больше 1, а в (4.6) может быть больше 1, доказательство все таки приведем, например, для свертки (4.2).

Пусть  $1/\mu = 1/p - 1/s$  и  $1/\nu = 1/q - 1/s$ . Тогда  $1/\mu \geq 0$ ,  $1/\nu \geq 0$  и  $1/s + 1/\mu + 1/\nu = 1$ . Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_e(y) d\mu_{k,a}(y) \right| &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/s} \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/\mu} \left( \int_{\mathbb{R}} |g_e(y)|^q d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/\nu} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q d\mu_{k,a}(t) \right)^{1/s} \|T^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}^{p/\mu} \|g_e\|_{q,d\mu_{k,a}}^{q/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (4.15) для оператора  $T^y$

$$\begin{aligned} \|(f *_T g_e)\|_{s,d\mu_{k,a}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_e(y)|^q d\mu_{k,a}(y) d\mu_{k,a}(x) \right)^{1/s} \\ &\quad \times \|T^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}^{p/\mu} \|g_e\|_{q,d\mu_{k,a}}^{q/\nu} \leq M_{T,\lambda}^T \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g_e\|_{q,d\mu_{k,a}}. \end{aligned}$$

Неравенство (4.6) доказано. Неравенство (4.5) доказывается аналогично. Теорема 27 доказана.

**З а м е ч а н и е 2.** Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  при  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in C_0(\mathbb{R})$  при  $p = \infty$ ,  $f_\varepsilon \in \mathcal{A}_{k,a}$ ,  $\|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $g$  — четная, то применяя лемму 3 и теорему 26, получим

$$\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq \{M_{T,\lambda}^\tau + M_{T,\lambda}^T\} \|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g\|_{1,d\mu_{k,a}},$$

поэтому,  $\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} = 0$  и  $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$  почти всюду.

## 4.10. Обобщенные средние. Сходимость в пространствах $L^p$

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$ ,  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}_{k,a}$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$ . Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+1/r-1)} \widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) = 1.$$

Далее под  $L^\infty(\mathbb{R})$  мы понимаем  $C_0(\mathbb{R})$ . В соответствии с теоремой 26 для  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , определяем  $(k, 1/r)$ -обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y). \quad (4.1)$$

Функцию  $\varphi$  будем называть генератором обобщенных средних (4.1). Если  $\varphi(x)$  — четный генератор, то согласно замечанию 2 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = \Phi_\varepsilon^T f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y).$$



В силу (4.5), (4.6)

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^\tau \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad (4.2)$$

$$\|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}. \quad (4.3)$$

Исследуем  $L^p$ -сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau^y f - f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = \sup_{|y| \leq \delta} \|T^y f - f\|_{p,d\mu_{k,a}}$$

– модули непрерывности функции  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Лемма 4.** Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} \leq (1 + M_{r,\lambda}^\tau) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} \leq (1 + M_{r,\lambda}^T) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad (4.4)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = 0. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (4.15), получим (4.4). Равенство (4.5) докажем для модуля непрерывности  $\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}}$ . Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для  $f, g \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$

$$|\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} - \omega_\tau(\delta, g)_{p,d\mu_{k,a}}| \leq (1 + M_{r,\lambda}^\tau) \|f - g\|_{p,d\mu_{k,a}},$$

равенство (4.5) можно доказывать для функций из плотного множества  $S_{1/r}(\mathbb{R})$ .

Пусть  $f \in S_{1/r}(\mathbb{R})$ . Для нормированной функции Бесселя

$$j'_\lambda(z) = -\frac{z}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(z)$$

[98, гл. 5], поэтому  $|j_\alpha(z) - 1| \leq \frac{|z|}{2(\lambda+1)}$  и из (11)  $|B_{k,a}(y, z) - 1| \lesssim |yz|^{1/(2r)}$ .

Так как  $\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)$  быстро убывает на бесконечности, то согласно (4.5)

$$\begin{aligned} |\tau^y f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |B_{k,a}(x, z)| |B_{k,a}(y, z) - 1| |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a}(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |B_{k,a}(y, z) - 1| |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a}(z) \lesssim \int_{\mathbb{R}} |yz|^{\frac{1}{2r}} |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{\frac{1}{2r}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (4.5) при  $p = \infty$ .

Рассмотрим случай  $p < \infty$ . По свойству (4.25) теоремы 26 для всех  $y$ ,  $\tau^y f(x) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Получим равномерные оценки по  $y$ . Для любого натурального  $m$ ,  $(\delta_{k,a})_z^m (B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z))$  является конечной линейной комбинацией функций вида  $|y|^{\alpha_s} j_{\lambda+s}(2r|yz|^{1/2r}) f_s(z)$ ,  $\alpha_s \geq 0$ ,  $f_s \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ , и согласно (4.3)

$$|\tau^y f(x)| \lesssim |x|^{-m/r}, \quad |f(x)| \lesssim |x|^{-m/r}$$

равномерно по  $|y| \leq 1$ . Равенство (4.5) будет вытекать из оценки

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau^y f(x) - f(x)|^p d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{p/(2r)} \int_{-R}^R d\mu_{k,a} + \int_{|x| \geq R} |x|^{-mp/r} d\mu_{k,a}(x).$$

для достаточно больших  $m$  и  $R > 0$ . Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 28. Пусть  $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$ , функции  $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}_{k,a}$ ,  $\varphi(0) = 1$ . Если  $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$  при  $1 \leq p \leq \infty$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(x) - \Phi_\varepsilon^T f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (4.2) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 28 достаточно доказывать на плотном множестве  $\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Если  $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ , то в силу (4.3)

$$\Phi_\varepsilon f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|f(x) - \Phi_\varepsilon f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) \right\|_{p, d\mu_{k,a}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\mu_{k,a}(y) \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\mu_{k,a}(y). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 24 вытекает из (4.4), (4.5), и оценки

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\mu_{k,a}(y) &\leq \omega_\tau(\varepsilon R, f)_{p, d\mu_{k,a}} \int_{|y| \leq R} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\mu_{k,a}(y) \\ &+ (1 + M_{r,\lambda}^T) \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \int_{|y| \geq R} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\mu_{k,a}(y). \end{aligned}$$

Теорема 28 доказана.

**Следствие 2.** Если в условиях теоремы 28 генератор  $\varphi$  — четный, то, учитывая неравенство (4.3),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(x) - \Phi_\varepsilon^T f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} = 0.$$

Обобщенные средние  $\Phi_\varepsilon f$ , для которых имеет место сходимость в пространствах  $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , назовем регулярными.

В [102] для преобразования Данкля исследованы средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Все они порождены четными генераторами. Рассмотрим их аналоги для обобщенного преобразования Фурье при  $a = 1/r$ .

Напомним, что  $\lambda = r(2k-1)$ . Генератором обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса будет функция  $\varphi(x) = e^{-r|x|^{1/r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Известно [90, теорема 5.1], что  $\widehat{\varphi} = \varphi \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Следовательно, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса регулярные.

Генератором обобщенных средних Пуассона будет функция  $\varphi(x) = e^{-2r|x|^{1/2r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ . Согласно [103, гл. 8, (8.6.4)]  $\widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r} (1 + y^{1/r})^{-(\lambda+3/2)}$ . Хотя  $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ , но  $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$  и обобщенные средние Пуассона также являются регулярными.

Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - |x|^{1/r})^\delta, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r,\delta} j_{\lambda+\delta+1}(2r|y|^{1/2r}), \quad \delta > 0$$

(см. [103, гл. 8, (8.5.33)]). Генератор  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$ . Из асимптотики функции Бесселя [98, гл. 7, 7.1] функция  $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$ , если только  $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$ . Число  $\delta_0$  называют критическим показателем. Если  $\delta > \delta_0$ , то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

## Глава 5

# Дискретное преобразование Фурье на параллелепипедальных сетках

### 5.1. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье

Задача интерполяции функций многих переменных является одной из классических задач теории приближений, а построение эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционных многочленов классической задачей численного анализа. Применение теоретико-числовых подходов позволяет получить в этой области новые результаты.

Параллелепипедальная сетка  $M(\vec{a}, N)$ , введенная Н. М. Коробовым в 1959 г. [?], состоит из точек

$$M_k = \left( \left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где  $\vec{a}$  набор оптимальных коэффициентов.

Перевод теории оптимальных коэффициентов на язык решёток, сделанный Э. Главкой в 1962 г. [?], позволяет для решётки  $\Lambda(\vec{a}, N)$  решений линейного сравнения

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N},$$

рассмотреть параллелепипедальную сетку, как пересечение взаимной решётки с единичным  $s$ -мерным кубом

$$\Lambda^*(\vec{a}, N) = \{ \vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z} \},$$

$$M(\vec{a}, N) = \Lambda^*(\vec{a}, N) \cap G_s, \quad G_s = \{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s \}.$$

Определения и основные свойства параллелепипедальных сеток изложены в [56].

Впервые для приближения функций эти сетки были применены В. С. Рябенкиным в 1960 г. [?]. О применении параллелепипедальных сеток с точки зрения теории приближений дано подробное изложение в [?].

## 5.2. Сведение многомерной Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетки к одномерной

Рассмотрим теоретико-числовые конструкции раскрывающие красоту объекта открытого Н. М. Коробовым.

В соответствии с работами [44], [50] рассмотрим  $\mathbb{Z}^s/\Lambda(\vec{a}, N)$ . Взяв по одному представителю из каждого класса, получаем полную систему вычетов  $M^*(\Lambda)$ .

Введем следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Пронумерованной полной системой вычетов будем называть*

$$M^{**}(\Lambda) = \{\vec{m}_t \mid \vec{m}_t \in M^*(\Lambda), t \equiv m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \pmod{N}, 0 \leq t < N\}.$$

В соответствии с работой [64] сформулируем теорему, позволяющую перейти к одномерной Фурье интерполяции.

ТЕОРЕМА 29. *Для интерполяционного многочлена функции  $f(\vec{x})$  в узлах параллелепипедальной сетки  $M(\vec{a}, N)$  по пронумерованной системы вычетов  $M^{**}(\Lambda)$*

$$S_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}_t \in M^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) e^{2\pi i(\vec{m}_t, \vec{x})},$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_t, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s)k}{N}} \end{aligned}$$

справедливо равенство коэффициентов Фурье с одномерным интерполяционным многочленом для функции  $f^*(x) = f(x, \{a_2 x\}, \dots, \{a_s x\})$  по равномерной сетке на отрезке  $[0, 1]$ :

$$S(f^*(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x},$$

где

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}, \\ c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) &= c_t. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полную пронумерованную систему вычетов

$$M_1^{**}(\Lambda) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Интерполяционный многочлен функции  $f(x)$  в узлах параллелепипедальной сетки  $M(\vec{a}, N)$  по пронумерованной системы вычетов  $M_1^{**}(\Lambda)$  будет

$$S_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}_{1,t} \in M_1^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) e^{2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{x})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) e^{2\pi i k x_1},$$

где

$$c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i (\vec{m}_{1,k}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^* \left( \frac{j}{N} \right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}.$$

Легко заметить, что системы вычетов  $M_1^{**}(\Lambda)$  и  $M^{**}(\Lambda)$  различаются на сдвиги по решётке  $\Lambda$ , а значит и коэффициенты Фурье при соответствующих гармониках совпадают.

Действительно,

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i (\vec{m}_{1,t}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) e^{-2\pi i \frac{k}{N} t} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left( \frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s) k}{N}} = c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t). \end{aligned}$$

□

### 5.3. О быстром преобразование Фурье

Задача интерполяции сводится к получению коэффициентов тригонометрического многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}$$

в точках  $x_j = \frac{j}{N}, j = 0 \dots N-1$ . Одним из эффективных способов получения коэффициентов  $c_k$  является алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

Как известно [65], дискретным преобразованием Фурье называется вычисление значений многочлена в комплексных корнях из единицы:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

а обратным дискретным преобразованием Фурье называется, операция – интерполяция коэффициентов по значениям  $y_j$

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{kj}{N}},$$

Известно, что с помощью схему Кули-Тьюки [65], для составного  $N = \prod_{i=1}^n p_i$ , можно получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в  $O \left( N \sum_{i=1}^n p_i \right)$  операций.

В работах [66, 67, 68] были предложены алгоритмы построения оптимальных коэффициентов для  $N = 2^n$ . При использовании таких коэффициентов, можно достичь асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в  $O(N \ln N)$  операций.

Для произвольного  $N$  использование схемы Радера [69] для простых  $p_i$ , также позволяет получить асимптотической сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в  $O(N \ln N)$  операций.

## Глава 6

# Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн

### 6.1. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства

Изучению распространения звуковых волн в присутствии плоских границ раздела сред посвящено большое количество работ. При этом в большинстве работ первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако часто возникает необходимость учитывать конечную удаленность источника звука от границ раздела сред. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоскую границу.

Задача о поле точечного источника, расположенного на конечном удалении от плоской границы раздела сред рассматривалась в ряде работ. Анализ отражения и преломления сферической волны на границе раздела двух однородных жидких и упругих полупространств проведен в [104, 105]. Задача об отражении сферической звуковой волны от плоскости, на которой заданы импедансные условия, решена в [106]. Отражение сферической звуковой волны от однородного вязкоупругого полупространством рассмотрено в [107].

В ряде работ исследовалось прохождение сферической звуковой волны через однородные изотропные упругие плоские слои. В [108, 109] исследовано прохождение сферической волны через тонкую бесконечную пластину, находящуюся в однородной жидкости. Взаимодействие сферической волны с однородной изотропной упругой пластиной конечной толщины и с двухслойной пластиной, состоящей из однородных и изотропных твердых слоев, изучено в [110, 111]. В [112] решена задача дифракции сферической волны на тонкой бесконечной пластине, разделяющей однородную и слоисто-неодородную среды. В [113] проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. В [114] построено точное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский однородный упругий слой. В качестве источника поля рассматривался сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Прохождение сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным изотропным упругим покрытием исследовано в [115].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении сферической звуковой

волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине слоем жидкости в случае произвольного закона неоднородности.

## 6.2. Постановка задачи

Пусть все пространство  $R^3$  разделено плоскостями  $z = 0$  и  $z = h$  на три области:  $D_1(z < 0)$ ,  $D_2(0 < z < h)$ ,  $D_3(z > h)$ . Область  $D_1$  — однородное упругое полупространство, которое характеризуется плотностью  $\rho_1$  и упругими постоянными  $\lambda$  и  $\mu$ . Область  $D_2$  представляет собой плоский слой идеальной неоднородной жидкости толщиной  $h$ , прилегающий к границе упругого полупространства  $z = 0$ . Полагаем, что плотность неоднородной жидкости  $\rho_2$  является дифференцируемой функциями координаты  $z$ , а скорость звука  $c_2$  — непрерывной функцией этой координаты. Область  $D_3$  заполнена однородной идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_3$  и скоростью распространения звука  $c$ .

В области  $D_3$  в точке  $M_0(0, 0, z_0)$  расположен точечный излучатель гармонических звуковых волн. Звуковое давление гармонической сферической звуковой волны записывается в виде

$$p_0 = A \frac{\exp[i(kR - \omega t)]}{R}, \quad (1)$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $k = \omega/c$  — волновое число однородной жидкости;  $\omega$  — круговая частота;  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ ;  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения  $M(x, y, z)$  и с точечным источником  $M_0$  соответственно;  $R = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$ ;  $t$  — время. В дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

Определим акустическое поле, отраженное упругим полупространством, покрытым неоднородным слоем жидкости.

## 6.3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном полупространстве в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [109]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad \text{div } \Phi = 0, \quad (3)$$

где  $\Psi$  и  $\Phi$  — скалярный и векторный потенциалы смещения частиц упругой среды  $\mathbf{u}$ ;  $k_l = \omega/c_l$  и  $k_\tau = \omega/c_\tau$  — волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно;  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho_1}$  — скорости продольных и поперечных волн. При этом вектор смещения частиц упругого однородного полупространства

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi, \quad (4)$$

где

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$



$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  — единичные векторы осей  $x, y$  и  $z$  прямоугольной декартовой системы координат.

Векторное уравнение (3) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора  $\Phi$

$$\Delta\Phi_x + k_\tau^2\Phi_x = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_y + k_\tau^2\Phi_y &= 0, \\ \Delta\Phi_z + k_\tau^2\Phi_z &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты  $\Phi_x$  и  $\Phi_z$  вектора  $\Phi$  будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца (5) и (6), а компоненту  $\Phi_y$  найдем с помощью уравнения  $\operatorname{div} \Phi = 0$ , из которого следует

$$\frac{\partial\Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Согласно (4) компоненты вектора  $\mathbf{u}$  выражаются через функции  $\Psi, \Phi_x, \Phi_y$  и  $\Phi_z$  по формулам

$$u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}. \quad (8)$$

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [104]

$$\Delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}p_2 - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad} \rho_2 \cdot \operatorname{grad} p_2 = 0, \quad (9)$$

где  $p_2$  — звуковое давление в неоднородном слое;  $c_2 = c_2(z)$ ,  $\rho_2 = \rho_2(z)$ .

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае гармонического движения описывается уравнением Гельмгольца [109]

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0, \quad (10)$$

где  $p_1 = p_0 + p_s$  — звуковое давление полного акустического поля в области  $D_3$ ,  $p_s$  — звуковое давление в рассеянной волне.

Скорости частиц в однородной жидкости и в неоднородном слое определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega}\operatorname{grad} p_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{i\rho_2\omega}\operatorname{grad} p_2. \quad (11)$$

Решения дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10) должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях  $z = 0$  и  $z = h$ , а также условиям излучения на бесконечности [109].

Граничные условия на поверхности полупространства  $z = 0$  заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и неоднородной жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = 0 : \quad -i\omega u_z = v_{2z}, \quad \sigma_{zz} = -p_2, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (12)$$

На границе раздела однородной и неоднородной жидкостей  $z = h$  должны быть равны нормальные скорости частиц жидкостей и акустические давления

$$z = h : \quad v_{1z} = v_{2z}, \quad p_1 = p_2. \quad (13)$$

Связь между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и составляющими вектора смещения  $\mathbf{u}$  в упругом полупространстве устанавливается на основе обобщенного закона Гука [116] и имеет вид

$$\sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (2), (5), (6), (9) и (10), удовлетворяющих граничным условиям (12) и (13), а также дополнительным условиям — условиям излучения на бесконечности.

## 6.4. Аналитическое решение задачи

Представим давление падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [104, 105]

$$p_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (15)$$

где

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i(\xi x + \eta y + \chi|z - z_0|)}, \quad \chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \quad (16)$$

При  $z < z_0$  формула (16) принимает вид (волна падает на неоднородный слой, покрывающий полупространство )

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = I(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y - \chi z)}, \quad I(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i\chi z_0}. \quad (17)$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (15), определяемое (17), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на полупространство с неоднородным слоем. Акустическое давление такой волны записывается в виде

$$p_{0pl} = A_0 e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}, \quad (18)$$

где  $A_0$  — амплитуда волны;  $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$ ,  $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ ,  $k_z = k \cos \theta_0$  — проекции волнового вектора плоской волны  $\mathbf{k}$  на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $|\mathbf{k}| = k$ ;  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (17) и (18) находим, что  $\xi$  соответствует  $k_x$ ,  $\eta$  —  $k_y$ ,  $\chi$  —  $k_z$ , а  $I(\xi, \eta) = A_0$ . Поэтому решение поставленной задачи можно найти, воспользовавшись решением задачи об отражении плоской звуковой волны от полупространства с прилегающим неоднородным слоем.

Действительно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением  $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$ , акустические давления в отраженной волне  $\tilde{p}_s$  и неоднородном слое

$\tilde{p}_2$ , потенциалы смещения  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Phi}$  в упругом полупространстве определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны  $p_{0pl}$ , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины  $p_s, p_2, \Psi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  подлежат определению путем интегрирования  $\tilde{p}_s, \tilde{p}_2, \tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}_x, \tilde{\Phi}_y, \tilde{\Phi}_z$  по  $\xi$  и  $\eta$  в бесконечных пределах.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным жидким покрытием.

## 6.5. Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости

Пусть из области  $D_3(z > h)$  на полупространство, покрытым неоднородным слоем жидкости падает под произвольным углом плоская звуковая волна, давление в которой определяется выражением (18). Определим волновые поля в областях  $D_1, D_2$  и  $D_3$ . Элементы решения задачи будем сопровождать индексом  $pl$ .

Потенциалы смещения в упругом полупространстве, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (2), (5) и (6) будем искать в виде

$$\Psi_{pl} = B e^{i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)}, \quad (19)$$

$$\Phi_{xpl} = C e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (20)$$

$$\Phi_{zpl} = D e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (21)$$

где  $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$ ,  $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$ . При этом согласно закону Снеллиуса [1]  $k_{lx} = k_{\tau x} = k_x$ ,  $k_{ly} = k_{\tau y} = k_y$ .

Подставим выражения (20) и (21) в (7) и проинтегрируем по  $y$ . Получим

$$\Phi_{ypl} = -\frac{1}{k_{\tau y}}(k_{\tau x}C - k_{\tau z}D)e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}. \quad (22)$$

Давление  $p_{2pl}$  является решением уравнения (9). Согласно закону Снеллиуса зависимость  $p_{2pl}$  от координаты  $x$  будет иметь вид  $\exp(ik_x x)$ , а от координаты  $y$  —  $\exp(ik_y y)$ . Поэтому функцию  $p_{2pl}$  будем искать в виде

$$p_{2pl} = P(z)e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (9), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции  $P(z)$

$$P''(z) + \alpha(z)P'(z) + \beta(z)P(z) = 0, \quad (24)$$

где  $\alpha(z) = -\frac{\rho_2'(z)}{\rho_2(z)}$ ;  $\beta(z) = \frac{\omega^2}{c_2^2(z)} - k_x^2 - k_y^2$ .

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Давление в отраженной волне  $p_{spl}$ , являющееся решением уравнения Гельмгольца (10), будем искать в виде

$$p_{spl} = A_1 e^{i[k_x x + k_y y + k_z(z-h)]}. \quad (25)$$

Подставляя (18) – (23) и (25) в граничные условия (12) и (13) и учитывая (8), (11) и (14), получим выражения для неизвестных коэффициентов  $A_1, B, C, D$

$$A_1 = -A_0 e^{-ik_z h} + P(h), \quad (26)$$

$$B = \frac{a_9 d_1}{\Delta} P(0), \quad C = -\frac{a_9 d_2}{\Delta} P(0), \quad D = \frac{-a_7 d_1 + a_8 d_2}{\Delta} P(0) \quad (27)$$

и два крайевых условия для дифференциального уравнения (24)

$$\begin{aligned} P'(0) + \gamma_1 P(0) &= 0, \\ P'(h) + \gamma_2 P(h) &= g, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{k_{\tau y} \Delta}; \quad \gamma_2 = \frac{ik_z \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad g = 2A_0 e^{-ik_z h} \gamma_2; \quad \Delta = (a_1 a_9 - a_7 a_3) d_1 - (a_2 a_9 - a_8 a_3) d_2;$$

$$a_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_{lz}^2; \quad a_2 = -\frac{k_{\tau z}}{k_{\tau y}} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2); \quad a_3 = \frac{k_{\tau x} k_{\tau z}^2}{k_{\tau y}}; \quad a_4 = 2k_{lx} k_{lz} k_{\tau y};$$

$$a_5 = k_{\tau x} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2); \quad a_6 = k_{\tau z} (-k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 + k_{\tau z}^2); \quad a_7 = 2k_{ly} k_{lz};$$

$$a_8 = k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2; \quad a_9 = -2k_{\tau x} k_{\tau z}; \quad d_1 = a_5 a_9 - a_8 a_6; \quad d_2 = a_4 a_9 - a_7 a_6.$$

Коэффициенты  $A_1, B, C, D$  выражаются через значения функции  $P(z)$  на концах отрезка  $[0, h]$ . Поэтому для их вычисления необходимо прежде всего решить крайевую задачу (24), (28).

Найдем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24), (28) методом степенных рядов [117].

Аппроксимируем функции  $\alpha(z)$  и  $\beta(z)$  многочленами относительно переменной  $z$

$$\alpha(z) = \sum_{m=0}^M \alpha_m (z - h/2)^m, \quad \beta(z) = \sum_{m=0}^M \beta_m (z - h/2)^m, \quad (29)$$

где  $M$  — степень многочлена.

Решение линейного уравнения с переменными коэффициентами (24) будем искать в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (z - h/2)^n. \quad (30)$$

Если коэффициенты уравнения (24)  $\alpha(z)$  и  $\beta(z)$  — многочлены, то степенной ряд (30) будет сходиться при любом значении  $z$  из отрезка  $[0, h]$  [117].

Производные  $P'(z)$  и  $P''(z)$  согласно (30) запишем в виде

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(z-h/2)^n,$$

$$P''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)P_{n+2}(z-h/2)^n. \quad (31)$$

Тогда

$$\alpha(z)P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{M_1} (n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m} \right] (z-h/2)^n, \quad (32)$$

$$\beta(z)P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{M_1} \beta_m P_{n-m} \right] (z-h/2)^n, \quad (33)$$

где  $M_1 = \min(M, n)$ .

Подставляя выражения (31) – (33) в уравнение (24) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени  $(z-h/2)$ , получаем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов  $P_n$

$$P_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m} + \beta_m P_{n-m}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

которое позволяет вычислить все коэффициенты разложения (30) за исключением  $P_0$  и  $P_1$ .

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу (24), (28) к задачам с начальными условиями в точке  $z = h/2$ . Найдем два линейно независимых решения дифференциального уравнения (24). В качестве фундаментальных решений можно выбрать два решения задачи Коши  $P^{(1)}(z)$  и  $P^{(2)}(z)$  уравнения (24) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} P^{(1)}|_{z=h/2} &= 1, & P^{(1)'}|_{z=h/2} &= 0, \\ P^{(2)}|_{z=h/2} &= 0, & P^{(2)'}|_{z=h/2} &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Однородность уравнения (24) позволяет представить решение краевой задачи (24), (28) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$P(z) = T_1 P^{(1)}(z) + T_2 P^{(2)}(z), \quad (36)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — постоянные.

Функции  $P^{(l)}(z)$  ( $l = 1, 2$ ) будем искать в виде (30)

$$P^{(l)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(l)}(z-h/2)^n \quad (l = 1, 2). \quad (37)$$

Все коэффициенты разложений (37) за исключением  $P_0^{(l)}$  и  $P_1^{(l)}$  ( $l = 1, 2$ ) вычисляются по формуле (34)

$$P_{n+2}^{(l)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m}^{(l)} + \beta_m P_{n-m}^{(l)}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

Подставляя (37) в начальные условия (35), находим

$$P_0^{(1)} = 1, \quad P_1^{(1)} = 0, \quad P_0^{(2)} = 0, \quad P_1^{(2)} = 1.$$

Подставляя (36) в краевые условия (28), получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $T_1$  и  $T_2$

$$c_{11}T_1 + c_{12}T_2 = 0,$$

$$c_{21}T_1 + c_{22}T_2 = g,$$

где

$$c_{11} = P^{(1)'}(0) + \gamma_1 P^{(1)}(0); \quad c_{12} = P^{(2)'}(0) + \gamma_1 P^{(2)}(0);$$

$$c_{21} = P^{(1)'}(h) + \gamma_2 P^{(1)}(h); \quad c_{22} = P^{(2)'}(h) + \gamma_2 P^{(2)}(h).$$

Определив из этой системы коэффициенты  $T_1$  и  $T_2$ , получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (24),(28)

$$P(z) = \frac{c_{12}}{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}} \left[ c_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(z - h/2)^n - c_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(z - h/2)^n \right]. \quad (39)$$

## 6.6. Отражение сферической волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением  $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$ , соответствующие величины  $\tilde{p}_s$ ,  $\tilde{p}_2$ ,  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Phi}_x$ ,  $\tilde{\Phi}_y$  и  $\tilde{\Phi}_z$  определяются формулами (19)–(23), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны давления  $p_{0pl}$ , в которых следует сделать замену  $k_x$  на  $\xi$ ,  $k_y$  на  $\eta$ ,  $k_z$  на  $\chi$ ,  $A_0$  на  $I(\xi, \eta)$ .

Искомое акустическое давление в рассеянной волне  $p_s$  определяется путем интегрирования  $\tilde{p}_s$

$$p_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_s(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Аналогичным образом путем интегрирования находятся  $p_2$ ,  $\Psi$ ,  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ ,  $\Phi_z$ .

Будем иметь

$$p_s(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} + \tilde{P}(h) \right] e^{i[\xi x + \eta y + \chi(z-h)]} d\xi d\eta, \quad (40)$$

где

$$\tilde{P}(h) = \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21} - \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} \left[ \tilde{c}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(h/2)^n - \tilde{c}_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(h/2)^n \right];$$

$$\tilde{c}_{11} = P^{(1)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(1)}(0); \quad \tilde{c}_{12} = P^{(2)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(2)}(0);$$

$$\tilde{c}_{21} = P^{(1)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(1)}(h); \quad \tilde{c}_{22} = P^{(2)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(2)}(h);$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{\eta \tilde{\Delta}}; \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{i\chi \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad \tilde{g} = 2I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} \tilde{\gamma}_2;$$

$$\tilde{\Delta} = (\tilde{a}_1\tilde{a}_9 - \tilde{a}_7\tilde{a}_3)\tilde{d}_1 - (\tilde{a}_2\tilde{a}_9 - \tilde{a}_8\tilde{a}_3)\tilde{d}_2;$$

$$\tilde{a}_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_1^2; \quad \tilde{a}_2 = -\frac{1}{\eta}(\xi^2 + \eta^2)k_2; \quad \tilde{a}_3 = \frac{\xi}{\tau}k_2^2; \quad \tilde{a}_4 = 2\xi\eta k_1; \quad \tilde{a}_5 = \xi(\xi^2 + \eta^2 - k_2^2);$$

$$\tilde{a}_6 = k_2(k_\tau^2 - 2\xi^2); \quad \tilde{a}_7 = 2\eta k_1; \quad \tilde{a}_8 = \xi^2 + \eta^2 - k_2^2; \quad \tilde{a}_9 = -2\xi k_2;$$

$$\tilde{d}_1 = \tilde{a}_5\tilde{a}_9 - \tilde{a}_8\tilde{a}_6; \quad \tilde{d}_2 = \tilde{a}_4\tilde{a}_9 - \tilde{a}_7\tilde{a}_6; \quad k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Чтобы обеспечить ограниченность  $\tilde{p}_s$  при  $z \rightarrow \infty$  выбор знака корня  $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$  осуществим из условия  $\text{Im}\chi \geq 0$ , то есть  $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$  при  $\xi^2 + \eta^2 < k^2$ ,  $\chi = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}$  при  $\xi^2 + \eta^2 > k^2$ .

Величины  $k_1$  и  $k_2$  определяются по формулам

$$k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_l^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_l^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_l^2;$$

$$k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 < k_\tau^2, \quad k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_\tau^2} \text{ при } \xi^2 + \eta^2 > k_\tau^2.$$

Оценить аналитически интеграл (40) не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету.

## 6.7. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины

Тело, имеющее форму конечного цилиндра, хорошо аппроксимирует многие реальные объекты и элементы конструкций. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах. Конечные цилиндрические рассеиватели звука изучены в гораздо меньшей степени.

В [118] найдено приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на жестком цилиндре конечной длины в случае, когда длина цилиндра много больше длины волны. Рассеяние плоской звуковой волны конечной упругой цилиндрической оболочкой и конечным упругим сплошным круговым цилиндром изучено в [119, 120]. В [121] экспериментально определено сечение обратного рассеяния сплошного упругого цилиндра конечной длины в водной среде при широком диапазоне изменения длины и радиуса цилиндра. Рассеяние звука упругим сплошным цилиндром, ограниченным на концах полусферами рассмотрено в [122]. Работы [123, 124] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [127] построена приближенная формула для давления акустического поля, рассеянного конечным импедансным цилиндром, в дальней зоне. В [128] изучено рассеяние акустических полей упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины. В [129] исследованы некоторые особенности рассеяния звука упругими цилиндрическими оболочками с полусферическими законцовками. В [130, 131] получена формула для звукового давления поля, рассеянного конечным сплошным цилиндром, в дальней зоне. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрические рассеиватели являются однородными изотропными телами. Рассеяние плоской звуковой волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием исследовано в [132].

В настоящей работе решается задача дифракции плоских звуковых волн на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины.

## 6.8. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины  $L$ . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус –  $r_1$  ( $r_1 < L$ ), а внутренний –  $r_0$ . Выберем прямоугольную декартову  $x, y, z$  и цилиндрическую  $r, \varphi, z$  системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси  $z$  совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии  $L/2$  (рис. 1). Полагаем, что модули упругости  $\lambda$  и  $\mu$  материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$ , а плотность  $\rho$  – непрерывной функцией координаты  $r$ . Полагаем, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны  $\rho_1$  и  $c$ .

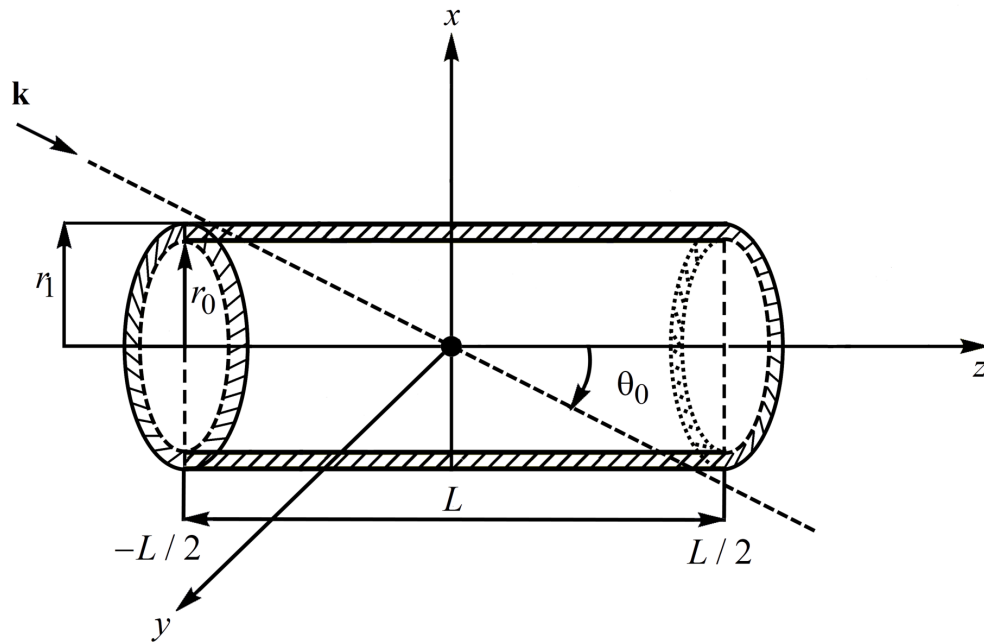


Рис. 6.1: Геометрия задачи

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ , который лежит в плоскости  $xz$  и образует угол  $\theta_0$  с положительным направлением оси  $z$ .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат  $x, y, z$  равен

$$\Psi_0 = A \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i \omega t], \quad (6.1)$$



где  $A$  – амплитуда волны;  $\omega$  – круговая частота;  $\mathbf{R} = (x, y, z)$  – радиус-вектор;  $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0, 0, k \cos \theta_0)$  – волновой вектор;  $k = \omega/c$  – волновое число жидкости;  $k = |\mathbf{k}|$ ;  $t$  – время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой.

## 6.9. Аналитическое решение

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [133]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0,$$

где  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_S$  – потенциал скорости полного акустического поля;  $\Psi_S$  – потенциал скорости рассеянной волны.

При этом скорость частиц  $\mathbf{v}$  и акустическое давление  $p$  в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [134]

$$\Psi_0 = A \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi), \quad (6.2)$$

где  $J_n(x)$  – цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ ;  $\alpha = k \cos \theta_0$ ,  $\beta = k \sin \theta_0$ .

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси  $z$  с волновым числом  $h$

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (6.3)$$

где  $H_n(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ ;  $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ . При  $|h| > k$  величина  $k_h$  становится мнимой. Выбор знака корня  $\sqrt{k^2 - h^2}$  из условия  $\text{Im } k_h \geq 0$  обеспечивает условие излучения на бесконечности [133] для потенциала  $\Psi_S$  при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$  при  $-k \leq h \leq k$  и  $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$  при  $|h| > k$ .

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [135]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $u_r, u_\varphi, u_z$  – компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц неоднородного слоя;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [135], соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),\end{aligned}\quad (6.5)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Будем считать, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при  $z = \pm L/2$  должны выполняться краевые условия [132]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \quad (6.6)$$

Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned}u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi),\end{aligned}\quad (6.7)$$

где  $k_q = \pi q/L$ . Выбор функций  $u_r, u_\varphi, u_z$  в виде (7) обеспечивает выполнение условий (6).

Подставляя разложения (7) в уравнения (4) с учетом (5), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r)$  для каждого  $n$  и  $q$

$$\widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \widehat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \widehat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$ ;  $\widehat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$ ,  $\widehat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$  – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned}a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0, & (p \neq m), \\ b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu) r, & b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu) r^2, \\ b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0, & b_{nq31} &= k_q(\lambda + \mu) r^2, \\ c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{nq12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{nq21} &= in(\mu'r + \lambda + 3\mu), & c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu'r - n^2 \lambda - \mu(2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), \\
c_{nq23} &= -ink_q(\lambda + \mu)r, & c_{nq31} &= k_q(\mu'r + \lambda + \mu)r, \\
c_{nq32} &= ink_q(\lambda + \mu)r, & c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_n(h)$  разложения (3) и функции  $U_{1nq}(r)$ ,  $U_{2nq}(r)$ ,  $U_{3nq}(r)$  в разложениях (7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при  $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (6.9)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при  $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (6.10)$$

Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh.$$

Используя формулу [136]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака  $\delta(x)$ , найдем преобразования Фурье по  $z$  потенциала падающей звуковой волны, определяемого (2)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_0(h) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \delta(h - \alpha), \\
\Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_0(h) dh.
\end{aligned} \quad (6.11)$$

Учитывая то, что  $u_r = 0$  при  $|z| > L/2$ , преобразование Фурье по  $z$  радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(h) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi), \\
u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh,
\end{aligned} \quad (6.12)$$

где

$$g_q(h) = (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[ \frac{\sin k_q^{(+)}}{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)}}{k_q^{(-)}} \right],$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q)/2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q)/2.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при  $r = r_1$  с учетом (3), (11), (12) находим коэффициенты  $A_n(h)$ , выраженные через  $U_{1nq}(r)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[ A i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (6.13)$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

Подставим во второе граничное условие (9) выражения (2), (3) и (7), домножим обе части равенства на  $\sin[k_q(z + L/2)]$  и проинтегрируем по  $z$  в пределах от  $-L/2$  до  $L/2$ . В результате, учитывая выражение для вронскиана [137], получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{(r_1)} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[ \frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh. \quad (6.15)$$

Подробный анализ интеграла вида (15) приведен в работе [132].

Из третьего и четвертого граничных условий (9) с учетом (5) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0, \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Из граничных условий (10) получим следующие краевые условия для системы (8):

$$\left( \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (6.17)$$

где  $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$  – матрица третьего порядка с элементами

$$f_{nq11} = \lambda(r)/r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r)/r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r)k_q,$$

$$f_{nq21} = in\mu(r)/r, \quad f_{nq22} = -\mu(r)/r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q \mu(r).$$

Построенная краевая задача (8), (14), (16), (17) может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [127]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[ \Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (6.18)$$

где  $\mathbf{R}_2$  – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки;  $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$  – функция Грина для свободного пространства;  $\Omega$  – боковая поверхность цилиндра;  $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$ ;  $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ ;  $z_2 \in [-L/2, L/2]$ .

Применение формулы (18) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [134]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(\xi) d\xi, \quad (6.19)$$

где

$$\tilde{G}_0(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_2)] \begin{cases} H_m(\eta r_2) J_m(\eta r), & r < r_2; \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2. \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Подставляя (3), (11), (19) в (18) с учетом (13) и формулы [127]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ лежит внутри } [a, b],$$

а также осуществляя интегрирование по переменной  $\varphi_2$  с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала  $\Psi_S$

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (6.20)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{Ai^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)}, \quad W_{2n} = Ai^n \beta J'_n(\beta r_1),$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi) z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi,$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi.$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (20) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению (3), в интегралах  $I_{1n}$ ,  $I_{2n}$ ,  $I_{3nq}$ ,  $I_{4nq}$  следует полагать  $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$  при  $-k \leq \xi \leq k$  и  $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$  при  $|\xi| > k$ .

Интегралы, входящие в (20), подлежат вычислению каким-либо численным методом. Для вычисления интегралов по переменным  $h$ ,  $\xi$  может быть применен прием обрезания бесконечных пределов и интегрирование по вещественной прямой заменено интегрированием по конечному отрезку.

## 6.10. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала рассеянного поля (20) вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на последовательном интегрировании по квадратурной формуле трапеций ;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Кобова.

Интегрирование по квадратурной формуле трапеций (метод А) является классическим методом численного интегрирования и подробно изложен, например, в [138].

Интегрирование по методу (В) сводится к построению параллелепедальной сетки  $M(\vec{a}, N)$  состоящей из точек

$$M_k = \left( \left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

где  $N$  — количество узлов параллелепедальной сетки;  $\vec{a}$  — набор оптимальных коэффициентов. Данный метод и способы периодизации интегрируемых функций подробно изложены в [141].

В данной работе применяется простейшая периодизация, предложенная в работе [142], позволяющая далее применять Фурье-интерполяцию.

## 6.11. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости  $|\Psi_S/A|$  от координаты  $\varphi$  в плоскости  $z = 0$  при  $r = r_*$ . В этом случае интегралы из (20) принимают вид

$$\begin{aligned}
I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (\alpha - \xi) z_2] \eta J'_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 d\xi, \\
I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (\alpha - \xi) z_2] J_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 d\xi, \\
I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (h - \xi) z_2] \frac{H_n (k_h r_1)}{k_h H'_n (k_h r_1)} g_q (h) \eta J'_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 dh d\xi, \\
I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (h - \xi) z_2] g_q (h) J_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 dh d\xi. \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбутираля ( $r_1 = 1$  м,  $r_0 = 0.5$  м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ( $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с). Рассматривалась как однородная цилиндрическая оболочка с характерными плотностью  $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и модулями упругости  $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>,  $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$  н/м<sup>2</sup>, так и неоднородная, физико-механические характеристики которой изменялись по закону

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 \cdot f(r), \\
f(r) &= 0.75 [(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1], \quad r_0 \leq r \leq r_1.
\end{aligned}$$

Расчеты выполнены при волновом размере тела  $kr_1 = 4$ , угле падения  $\theta_0 = \pi/2$ , для значений  $L/r_1 = 5, 50, 100$  и  $r_* = 100$  м.

Решение краевой задачи (8), (14), (16), (17) получено методом сплайн-коллокации [139].

Суммирование в (20) проводилось в диапазоне от  $-S$  до  $S$  по индексу  $n$  и от 1 до  $S$  по индексу  $q$ , где  $S = 2[kr_1] + 1$ ,  $[\cdot]$  – целая часть числа.

Вычисления интегралов (6.21) проводилось двумя методами (А и В): последовательным интегрированием по квадратурной формуле трапеций [138] на равномерной сетке и по квадратурной формуле на основе параллелепедальной сетки Коробова [141]. При расчетах по формуле трапеций использовались следующие параметры:  $M_1 = 2(W \times L) / h_1^2$ ,  $M_2 = 4(W \times Q \times L) / h_2^3$  – число узлов сеток для расчета двойных и тройных интегралов из (6.21) соответственно,  $h_1$  и  $h_2$  – шаги этих сеток.

В первой серии численных экспериментов определялись параметры  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  сеток разбиения методов А и В так, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления  $\Psi_S(\varphi)$ . Через  $N_1$ ,  $N_2$  обозначено количество узлов параллелепедальных сеток для вычисления двойных и тройных интегралов соответственно. С целью подбора оптимальных параметров сеток использовалось предположение, сделанное на основании работы [132], что при  $L/r_1 \gg 1$  поле  $\Psi_S(\varphi)$ , рассеянное цилиндрической оболочкой конечной длины, должно совпадать с рассеянным полем  $\Psi_S^{(\infty)}(\varphi)$ , полученным при дифракции на цилиндрической оболочке бесконечной длины. Решение задачи рассеяния

плоской звуковой волны однородной упругой цилиндрической оболочкой бесконечной длины получено в работе [140], не содержит интегралов и может служить базой при выборе параметров  $M_1, M_2, N_1, N_2$ . При этом степень согласованности результатов оценивалась величинами

$$R_A = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi, \quad R_B = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(B)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

В результате было получено, что для достижения ошибки  $R_A, R_B < 10^{-6}$  следует выбрать значения  $M_1 = 3.2 \cdot 10^5, M_2 = 5.12 \cdot 10^6, N_1 = 96077$  ( $a = 35489$ ),  $N_2 = 907956$  ( $a_1 = 178379, a_2 = 657577$ ). В скобках указаны значения оптимальных коэффициентов  $\vec{a}$ .

Следует отметить, что вычисление интегралов (6.21), входящих в (20), сопряжено с некоторыми трудностями, связанными с тем, что цилиндрическая функция Ганкеля первого рода  $H_n(x)$  при  $x = 0$  имеет полюс  $n$ -го порядка при  $n \neq 0$  и логарифмическую особенность при  $n = 0$ . При численных расчетах интегралов (6.21) отрезки интегрирования по переменным  $\xi, h$  разбивались на участки  $(-Y, -k - \varepsilon), (-k - \varepsilon, -k + \varepsilon), (-k + \varepsilon, k - \varepsilon), (k - \varepsilon, k + \varepsilon), (k + \varepsilon, Y)$ , где  $Y = W, Q$  соответственно,  $\varepsilon > 0$  малый параметр. На участках  $(\pm k - \varepsilon, \pm k + \varepsilon)$  цилиндрические волновые функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка  $n$ , а также их производные заменялись асимптотическими формулами при малых значениях аргумента [20], так как в окрестностях точек  $\xi, h = \pm k$  значения  $\eta, k_h$  малы.

На рис. 2-4 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля для значений  $L/r_1 = 5, 50, 100$  соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла  $\varphi$ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Штриховые линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Сравнение кривых на рис. 3 и 4 показывает, что при достаточно больших значениях  $L/r_1$  поведение амплитуды рассеяния звука отличается незначительно.

Важно отметить, что штриховая кривая на рис. 4, построенная для случая однородной упругой оболочки при  $L/r_1 = 100$ , полностью повторяет кривую, построенную с использованием аналитического решения из [140], что позволяет сделать вывод о корректности используемых методов численного интегрирования. Установлено, что пределы интегрирования  $W, Q$  имеют сильную зависимость от значения волнового числа внешней области  $k$ , поэтому для различных значений частоты падающей волны  $\omega$  следует подбирать параметры сеток индивидуально, основываясь на величинах  $R_A, R_B$ .

Отметим, что используемые параметры  $N_1, N_2, M_1, M_2$  обеспечивают достаточное совпадение результатов, полученных двумя методами (А и В) вычисления интегралов (6.21), где согласованность результатов оценивалась величиной

$$R = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(B)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

Поэтому на диаграммах построено только по одной линии для каждого набора входных геометрических и физико-механических параметров.



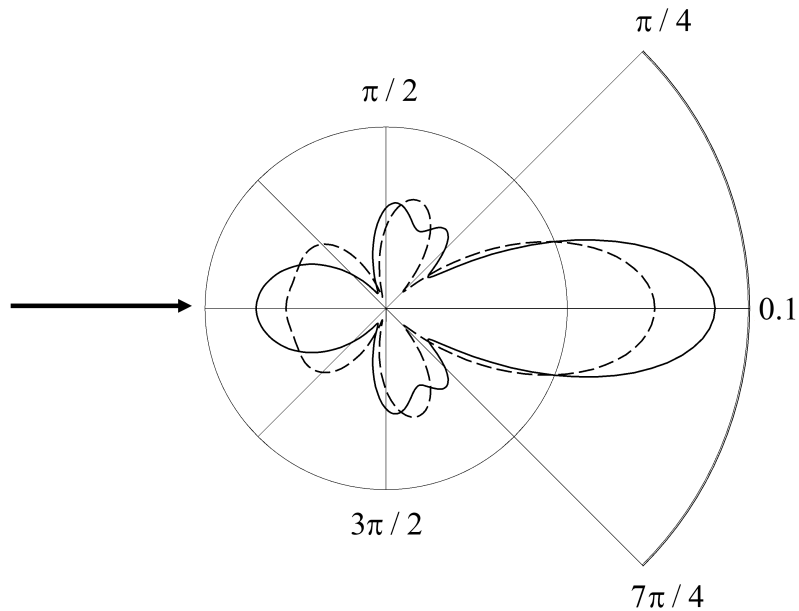


Рис. 6.2: Диаграммы направленности рассеянного поля,  $L/r_1 = 5$ .

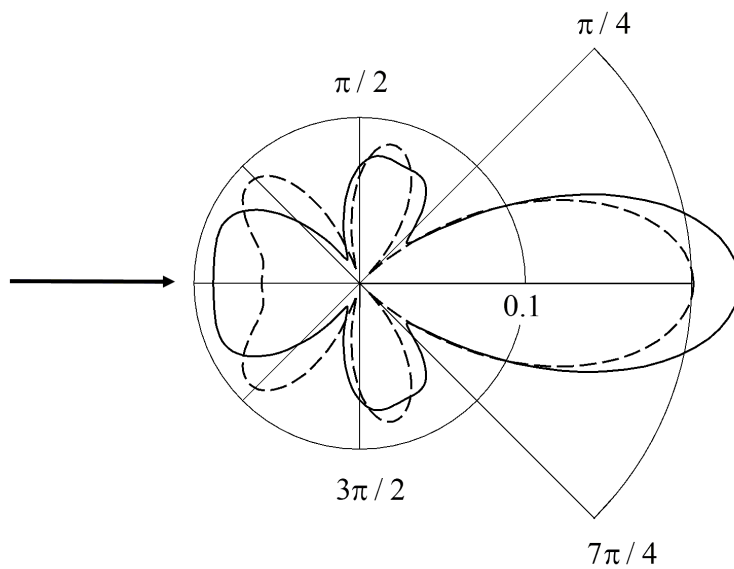


Рис. 6.3: Диаграммы направленности рассеянного поля,  $L/r_1 = 50$ .

Заметим, что отношение числа точек  $M_1/N_1 \approx 3.33$ ,  $M_2/N_2 \approx 5.63$ , однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале  $\varphi \in [0, 2\pi]$  методом В –  $t_B$  по отношению к  $t_A$  составляет только 10-12% для двойных и 14-17% для тройных интегралов.

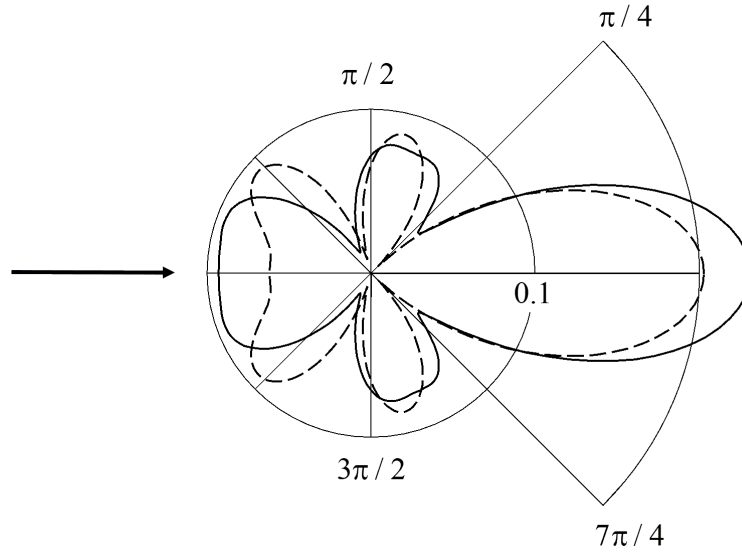


Рис. 6.4: Диаграммы направленности рассеянного поля,  $L/r_1 = 100$ .

## 6.12. Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости

Излучение звука вытянутыми и сплюснутыми эллипсоидами вращения — сфероидами рассматривалось в ряде работ, например, [1 - 5]. При этом исследовались акустические свойства неподвижных сфероидальных излучателей в идеальной жидкости, находящейся в состоянии покоя. В [1] решена задача об акустическом излучении вытянутого сфероида, поверхность которого колеблется произвольным образом. Получены аналитические выражения для акустического давления, скорости, импеданса излучения. Проведены численные расчеты для случая колебаний тонкого сфероида. В [2] с использованием сфероидальной геометрии анализируется акустическое излучение поршней эллиптического профиля. В [3] рассматривается излучение вытянутых и сплюснутых сфероидов. Определены направленность излучения и энергетические характеристики таких излучателей при произвольном распределении колебательной скорости на их поверхности. В [4, 5] исследуется акустическое поле, генерируемое колеблющимися с постоянной амплитудой участками поверхности абсолютно жесткого сфероида (вытянутого [4] и сплюснутого [5]), имеющими форму колпачков и колец. Проведены численные расчеты акустического импеданса излучения.

В настоящей работе рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука.

### 6.13. Постановка задачи

Рассмотрим сфероид, на который вдоль оси вращения набегают стационарный поток идеальной сжимаемой жидкости. Жидкость характеризуется плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ . Полагаем, что скорость потока много меньше скорости звука ( $u \ll c$ ). Поэтому будем считать, что в результате обтекания сфероида потоком вихреобразование не происходит и поток является потенциальным.

Пусть осью вращения сфероида является ось  $z$  прямоугольной декартовой системы координат  $x, y, z$  с началом в центре сфероида, а поток набегают в направлении, противоположном оси  $z$ . Для определенности считаем сфероид вытянутым.

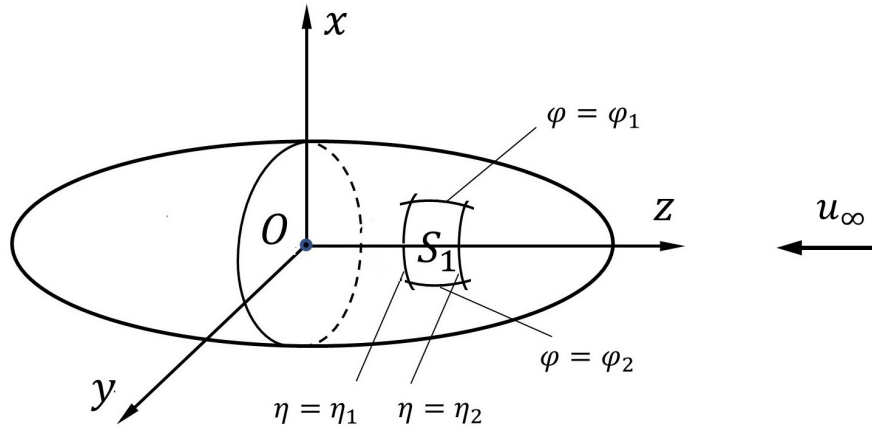


Рис. 1: Геометрия задачи

Свяжем с координатами  $x, y, z$  вытянутые сфероидальные координаты  $\xi, \eta, \varphi$  [6]

$$x = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = h\xi\eta$$

$$(1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где  $h$  — половина межфокусного расстояния сфероида.

Уравнение поверхности сфероида в вытянутой сфероидальной системе координат записывается через радиальную сфероидальную координату в виде  $\xi = \xi_0$ . Поверхность  $\xi = \xi_0$  является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью, равной  $2h\xi_0$ , и малой осью, равной  $2h(\xi_0^2 - 1)^{1/2}$ .

На поверхности сфероида  $S$  находится излучатель гармонических звуковых волн. Часть поверхности сфероида  $S_1$ , ограниченная кривыми  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$ ,  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ , пульсирует с нормальной колебательной скоростью постоянной амплитуды  $U$

$$V_n = \begin{cases} U \exp(-i\omega t) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2, \end{cases} \quad (1)$$

а остальная часть поверхности сфероида  $S_2$  является абсолютно жесткой (рис. 1). Здесь  $\omega$  — круговая частота;  $t$  — время. Без ограничения общности будем полагать, что  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$  (соответствующим поворотом координатной системы  $x, y, z$  относительно оси  $z$  всегда можно получить разделение плоскостью  $xOz$  поверхности  $S_1$  на две симметричные части).

Определим акустическое поле сфероидального излучателя.

## 6.14. Аналитическое решение задачи

Получим приближенное аналитическое решение задачи методом Блохинцева [7].

Согласно [7] распространения звука в стационарном потоке идеальной жидкости описывается уравнением

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{2}{c} (\nabla\Phi \cdot \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t}) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\Psi$  — потенциал скорости акустического поля ( $\mathbf{v} = \nabla\Psi$ );  $\Phi$  — потенциал скорости невозмущенного звуком потока ( $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ ). Уравнение (2) получено при пренебрежении членами порядка  $u^2/c^2$ .

Положив  $\Psi = \psi \exp(-i\omega t)$ , из (1) получаем

$$\Delta\psi + k^2\psi + 2i\frac{k}{c} (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi) = 0, \quad (3)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число.

Искомый потенциал скорости акустического поля  $\psi$ , являющийся решением уравнения (3), должен удовлетворять граничному условию на поверхности тела  $v_n|_S = V_n|_S$ , то есть

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|_S = \begin{cases} U & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2 \end{cases} \quad (4)$$

и условию излучения на бесконечности [8].

Так как скорость потока  $u \ll c$ , то будем полагать, что жидкость является несжимаемой [7].

Потенциал  $\Phi$  является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (5)$$

и должен удовлетворять граничному условию, которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на поверхности абсолютно жесткого тела

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (6)$$

а в бесконечно удаленной точке (в координатной системе  $x, y, z$ )  $\nabla\Phi = (0, 0, -u_\infty)$ , где  $-u_\infty$  — скорость потока на бесконечности.

Выражение для потенциала  $\Phi$  имеет вид [9]

$$\Phi = hu_\infty\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = -\eta \left[ \xi - \left( \frac{1}{2}\xi \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - 1 \right) / \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1} \right) \right]. \quad (7)$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (8)$$

где  $\psi_0$  — потенциал скорости акустического поля сфероидального излучателя в отсутствии потока.

Потенциал  $\psi_0$ , являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющий граничному условию (произвольное распределение колебательной скорости на поверхности сфероида )

$$\left. \frac{\partial\psi_0}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_0} = f(\eta, \varphi) \quad (10)$$

и условию излучения на бесконечности, в случае симметричных колебаний поверхности относительно плоскости  $xOz$  будем искать в виде

$$\psi_0 = Uh\tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\psi}_0 = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где  $S_{mn}(q, \eta)$  и  $R_{mn}^{(3)}(q, \xi)$  — угловая первого рода и радиальная третьего рода вытянутые сфероидальные функции;  $q = kh$  — волновой размер сфероида;  $f(\eta, \varphi)$  — функция распределения нормальной колебательной скорости на поверхности сфероида.

Подставим (11) в (10), учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$ . Воспользовавшись условиями ортогональности косинусов и вытянутых угловых сфероидальных функций, находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi U N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{\xi_0^2 - \eta^2}{\xi_0^2 - 1} \right)^{1/2} f(\eta, \varphi) S_{mn}(q, \eta) \cos m\varphi d\eta d\varphi. \quad (12)$$

Здесь  $H_\xi = h \left( \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$  — коэффициент Ламе координаты  $\xi$ ;  $N_{mn}(q)$  — норма угловых сфероидальных функций;  $\delta_{0m}$  — символ Кронекера.

Подставляя выражение (8) в уравнение (3) и принимая во внимание (5) и (9), убеждаемся, что (8) удовлетворяет (3) при пренебрежении членами порядка  $u^2/c^2$ .

Подставим (8) в граничное условие (4). С учетом условий (6) и (10) находим, что (8) удовлетворяет условию (4) тогда, когда

$$f(\eta, \varphi) = \begin{cases} U \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0) (\xi_0^2 - 1)^{1/2}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{mn}(q, \eta) \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) d\eta \times \\ \times \begin{cases} (\varphi_2 - \varphi_1)/2 & \text{при } m = 0, \\ (\sin m\varphi_2 - \sin m\varphi_1)/m & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Согласно [7] акустическое давление в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = \rho [i\omega\psi_0 - (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi_0)] \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (15)$$

которую с учетом (7) и (11) перепишем в виде

$$p = \rho c U \left[ i q \tilde{\psi}_0 - h^2 \frac{u_\infty}{c} \left( \nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\psi}_0 \right) \right] \exp \left( -i q \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi} \right). \quad (16)$$

Учитывая, что в системе координат  $\xi, \eta, \varphi$   $\nabla = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,

где  $H_\xi = h \left( \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$ ,  $H_\eta = h \left( \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}$ ,  $H_\varphi = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]$  — коэффициенты Ламе, имеем

$$\begin{aligned} \left( \nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\psi}_0 \right) = & \frac{1}{h^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ -(\xi^2 - 1) \eta \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right) / \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \right. \\ & \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi) \cos m\varphi - \\ & - (1 - \eta^2) \left[ \xi - \left( \frac{1}{2} \xi \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1 \right) / \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \\ & \left. \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S'_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi \right\}. \end{aligned}$$

На поверхности сфероида акустическое давление определяется по формуле

$$p = \rho c U \left[ i q \tilde{\psi}_0|_{\xi=\xi_0} + \frac{2u_\infty(1 - \eta^2)}{c(\xi_0^2 - \eta^2) \left( (\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right)} \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_0} \right] \exp \left( -i q \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} \right), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} = 2\eta \left[ (\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right]^{-1}.$$

Волновые сфероидальные функции представляются следующими разложениями [5, 10 – 12]:

$$S_{mn}(q, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} {}_r d_r^{mn}(q) P_{m+r}^m(\eta), \quad (18)$$

$$N_{mn}(q) = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)! [d_r^{mn}(q)]^2}{(2m+2r+1)r!},$$

$$R_{mn}^{(3)} = \left[ \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) \right]^{-1} \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} {}_r i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) h_{m+r}(q\xi). \quad (19)$$

Здесь  $P_n^m(\eta)$  — присоединенный многочлен Лежандра степени  $n$  порядка  $m$ ;  $h_m(q\xi)$  — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка  $m$ ; штрих над знаком суммы указывает на то, что суммирование производится по четным  $r$ , если  $(n - m)$  четное, и по нечетным  $r$ , если  $(n - m)$  нечетное.

Коэффициенты  $d_r^{mn}(q)$  находятся из рекуррентного соотношения [10 – 12]

$$\alpha_r d_{r+2}^{mn}(q) + [\beta_r - \lambda_{mn}(q)] d_r^{mn}(q) + \gamma_r d_{r-2}^{mn}(q) = 0, \quad r \geq 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} q^2; \\ \beta_r &= (m+r)(m+r+1) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} q^2; \\ \gamma_r &= \frac{r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} q^2; \quad d_{-2}^{mn} = d_{-1}^{mn} = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения  $\lambda_{mn}(q)$  параметра разделения  $\lambda$  уравнения Гельмгольца в вытянутой сфероидальной системе координат являются решениями трансцендентного уравнения, имеющего вид непрерывной дроби [6, 11].

Соотношения (20) связывают коэффициенты  $d_r^{mn}(q)$ , имеющие индексы  $r$  одной и той же четности. Для сходимости ряда (18) необходимо, чтобы при  $r \rightarrow \infty$  отношение  $\frac{d_{r+2}^{mn}(q)}{d_r^{mn}(q)}$  убывало как  $q^2/4r^2$  [12].

Система (20) определяет коэффициенты  $d_r^{mn}(q)$  с точностью до множителя, который задается нормировкой вытянутых угловых сфероидальных функций. При нормировке Фламмера [6] имеют место соотношения [11, 12]

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r/2} (r+2m)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r+2m}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m)/2} (n+m)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, \quad (21)$$

когда  $(n-m)$  — четное, и

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-1)/2} (r+2m+1)!}{2^r \left(\frac{r-1}{2}\right)! \left(\frac{r+2m+1}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m-1)/2} (n+m+1)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}, \quad (22)$$

когда  $(n-m)$  — нечетное.

## 6.15. Численные исследования

По формуле (17) были проведены расчеты полярных диаграмм распределения акустического давления  $|p|/\rho cU$  на поверхности сфероида. При расчетах полагалось  $\xi_0 = 1.02$  и  $\xi_0 = 1.1$  (что соответствует отношению большой оси к малой, равному 5.1 и 2.4 соответственно), волновой размер сфероида  $q = 1$ . Поверхность  $S_1$  задана параметрами  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$ ,  $\eta_2 = 1$ , а значение  $\eta_1$  полагалось равным 0 и 0.5.  $S_1$  представляет собой колпачок в носовой части сфероида, в основании которого лежит окружность, образованная пересечением гиперboloида вращения  $\eta = \eta_1$  с поверхностью сфероида  $\xi = \xi_0$ . Сфероид находится в воде ( $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с),  $u_\infty/c = 0, 0.1, 0.2$ .

Для рассматриваемой области  $S_1$  задача является осесимметричной ( $m = 0$ ). Тогда будем иметь

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{0n} S_{0n}(q, \eta) R_{0n}^{(3)}(q, \xi),$$

где

$$A_{0n} = \frac{1}{2(\xi_0^2 - 1)^{1/2} N_{0n}(q) R_{0n}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{0n}(q, \eta) \exp\left(iq \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0}\right) d\eta.$$

При проведении расчетов для нахождения собственных значений  $\lambda_{0n}(q)$  использовалось степенное разложение [9]

$$\lambda_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} l_{2s} q^{2s},$$

где коэффициенты  $l_{2s}$  приведены в [9].

Процесс вычисления коэффициентов  $d_r^{0n}(q)$  был организован следующим образом. Выбиралось достаточно большое значение  $r = N$  и полагалось  $\frac{d_{N+2}^{0n}(q)}{d_N^{0n}(q)} = q^2/4N^2$ . Затем из системы (20) последовательно находились коэффициенты  $d_N^{0n}(q)$ ,  $d_{N-2}^{0n}(q)$ ,  $d_{N-4}^{0n}(q), \dots, d_0^{0n}(q)$  или  $d_1^{0n}(q)$  (при четном и нечетном  $N$  соответственно), выраженные через коэффициент  $d_{N+2}^{0n}(q)$ . Последний определялся из (21) или (22). В результате были вычислены две последовательности коэффициентов  $d_r^{0n}(q)$  по четным и нечетным значениям индекса  $r$ . При расчетах выбиралось  $N = 100$  ( $N = 101$ ) и  $N = 200$  ( $N = 201$ ), что приводит к практически одинаковым значениям быстро убывающих коэффициентов  $d_r^{0n}(q)$ . Вытянутые сфероидальные функции рассчитывались по формулам (18) и (19).

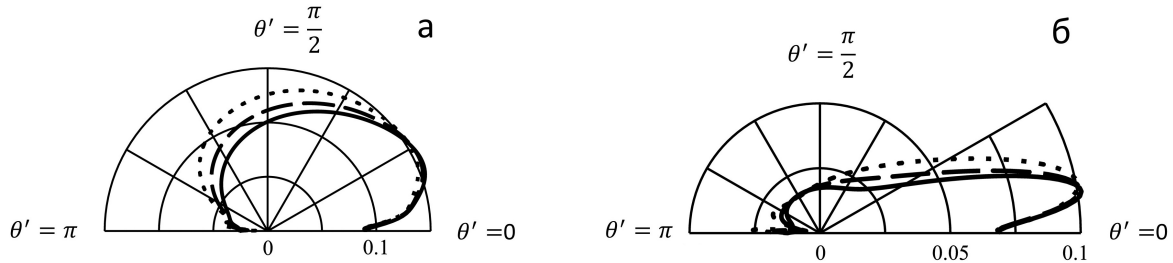
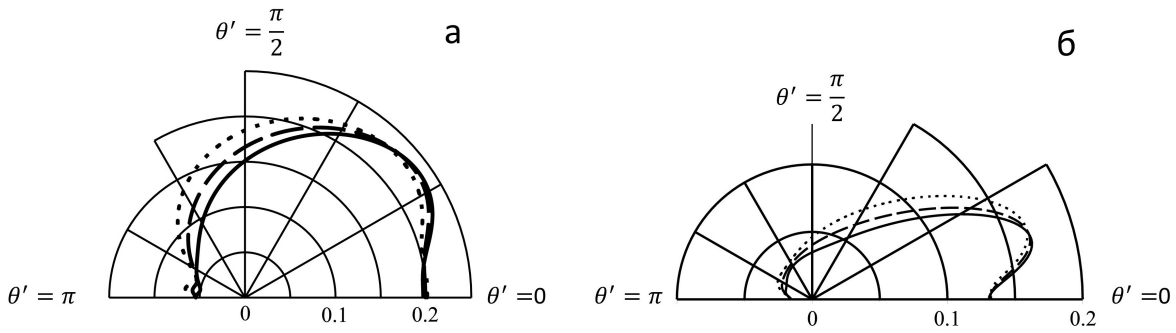


Рис. 2: Распределение акустического давления на поверхности сфероида  $\xi_0 = 1.02$ ,

Рис. 3: Распределение акустического давления на поверхности сфероида  $\xi_0 = 1.1$ ,  
а —  $\eta_1 = 0$ , б —  $\eta_1 = 0.5$   
а —  $\eta_1 = 0$ , б —  $\eta_1 = 0.5$

На рис. 2 и рис. 3 представлены полярные диаграммы распределения акустического давления на поверхности сфероида при  $\xi_0 = 1.02$  и  $\xi_0 = 1.1$  соответственно. Величины  $|p|/\rho c U$  откладывались на лучах  $\theta'$ , проведенных из начала системы координат в расчетные точки кривой, образованной пересечением сфероидальной поверхности  $\xi = \xi_0$  и плоскости  $xOz$ . Сферическая координата  $\theta'$  связана со сфероидальными координатами соотношением  $\operatorname{tg} \theta' = \frac{[(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}}{\xi_0 \eta}$ . Отсюда получаем следующее соотношение





между углом наблюдения  $\theta'$  и координатой  $\eta$ , используемое при проведении расчетов:  $\eta = \frac{\cos \theta' \sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi_0^2 - \cos^2 \theta'}}$ . На рисунках сплошные линии соответствуют случаю  $u_\infty/c = 0$ , штриховые —  $u_\infty/c = 0.1$ , пунктирные —  $u_\infty/c = 0.2$ .

Как видно из полярных диаграмм на характер распределения акустического давления по поверхности движущегося сфероида существенно влияют размер и расположение колеблющейся части поверхности тела, конфигурация сфероида и значение отношения  $u_\infty/c$ .

## 6.16. Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием решены в [160]. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [161, 162] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [163]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Дифракция плоской волны цилиндром с покрытием в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев была изучена в [164]. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [165, 166].

Задачи дифракции сферических звуковых волн на упругих цилиндрических телах с математической точки зрения являются более сложными по сравнению с задачами дифракции плоских и цилиндрических волн. Изучение дифракции сферической звуковой волны на цилиндрическом теле представляет значительный интерес для теории и практики. В этом случае геометрия рассеивающего объекта отлична от геометрии падающей волны, а учет криволинейности волнового фронта весьма важен, когда источник находится на небольшом расстоянии от рассеивателя. Такие задачи исследовались в [8-

10]. В [167] рассмотрена задача дифракции сферической звуковой волны однородным упругим цилиндром с применением потенциалов Дебая. В [168] показано, что решение задачи рассеяния сферических звуковых волн на упругом рассеивателе цилиндрической может быть получено с использованием известного решения рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны, а в [169] данный подход был применен для случая упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием. Дифракция звука от точечного источника упругим цилиндром с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием исследована в [170].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости.

## 6.17. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса  $r_3$ , покрытый однородным изотропным упругим слоем с внешним радиусом  $r_2$ . Материал упругого слоя характеризуется плотностью  $\rho$  и упругими постоянными  $\lambda$  и  $\mu$ . Цилиндр окружен радиально-неоднородным цилиндрическим слоем идеальной жидкости, внешний радиус которого равен  $r_1$ . Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  выбрана таким образом, что координатная ось  $z$  совпадает с осью вращения цилиндра. Плотность неоднородного жидкого слоя  $\rho_1$  и скорость звука в слое  $c_1$  являются прерывными функциями радиальной координаты:  $\rho_1 = \rho_1(r)$ ,  $c_1 = c_1(r)$ . Цилиндр с прилегающим неоднородным по толщине жидким слоем помещен в однородную идеальную жидкость с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого  $(r_i, \varphi_i, z_i)$ . Акустическое давление падающей волны

$$p_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|},$$

где  $A$  – амплитуда волны;  $k = \omega/c_0$  – волновое число жидкости;  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_i$  – радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник;  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим звуковое давление во внешнем пространстве, звуковое давление в неоднородном жидком слое и поле смещений в однородном упругом покрытии.

## 6.18. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущение в однородной идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [171]

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{6.22}$$

где  $p = p_0 + p_S$  – давление полного акустического поля;  $p_S$  – звуковое давление в рассеянной волне.

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [172]

$$\Delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2} p_1 - \frac{1}{\rho_1} \text{grad } \rho_1 \text{ grad } p_1 = 0, \quad (6.23)$$

где  $p_1$  – звуковое давление в неоднородном слое.

Скорости частиц в однородной жидкости  $\mathbf{v}$  и в неоднородном слое  $\mathbf{v}_1$  определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\rho_0\omega} \text{grad } p, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega} \text{grad } p_1. \quad (6.24)$$

Уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом изотропном цилиндрическом слое в случае установившегося режима движения, имеют вид [171]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (6.25)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (6.26)$$

где  $\Psi$  и  $\Phi$  – скалярный и векторный потенциалы смещения;  $k_l = \omega/c_l$  и  $k_\tau = \omega/c_\tau$  – волновые числа продольных и поперечных упругих волн;  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости продольных и поперечных волн. Вектор смещения  $\mathbf{u}$  частиц упругого однородного цилиндрического слоя определяется выражением

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi. \quad (6.27)$$

Представим вектор  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \text{rot } (L \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где  $L$  и  $M$  – функции пространственных координат;  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси  $z$ . Тогда векторное уравнение (5) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций  $L$  и  $M$

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0, \quad (6.28)$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0. \quad (6.29)$$

В цилиндрической системе координат уравнение Гельмгольца (1) для давления в рассеянной волне и уравнение (2) будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + k_1^2(r) p_1 = 0, \quad (6.31)$$

где  $k_1(r) = \omega/c_1(r)$ .

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\mathbf{u}$  в однородном изотропном цилиндрическом слое имеют вид [173]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (6.32)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Используя соотношения (11), выразим компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$  через функции  $\Psi$ ,  $L$ ,  $M$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\lambda k_l^2 \Psi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 L}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right) \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial z} \right) - \mu k_\tau \left( \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 L}{\partial r \partial z^2} + k_\tau^2 \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z} \right).\end{aligned}\quad (6.33)$$

На поверхности абсолютно жесткого цилиндра ( $r = r_3$ ) при переходе через границу раздела абсолютно жесткой и упругой сред должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (6.34)$$

Граничные условия на внешней поверхности упругого цилиндрического слоя ( $r = r_2$ ) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругого материала цилиндра и неоднородной жидкости, равенстве нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$-i\omega u_r = v_{1r}, \quad \sigma_{rr} = -p_1, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (6.35)$$

На внешней поверхности неоднородного жидкого слоя ( $r = r_1$ ) должны быть равны нормальные скорости частиц однородной и неоднородной жидкости, а также непрерывны акустического давления:

$$v_r = v_{1r}, \quad p = p_1. \quad (6.36)$$

Здесь  $v_r = \frac{1}{i\rho_0\omega} \frac{\partial p}{\partial r}$ ,  $v_{1r} = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p_1}{\partial r}$ .

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (4), (7)-(10), удовлетворяющих граничным условиям (13)-(15). Кроме того, давление  $p_S$  должно удовлетворять условию излучения на бесконечности [171]

$$p_S = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial p_S}{\partial r} - ikp_S = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

## 6.19. Аналитическое решение задачи

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций [174], представим звуковое давление падающей волны в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям

$$\begin{aligned}p_0 &= A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_0(h) dh, \\ \tilde{p}_0(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_i)] \begin{cases} H_n(k_h r_i) J_n(k_h r), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i, \end{cases}\end{aligned}\quad (6.37)$$

где  $J_n(x)$  – цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ ;  $H_n(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ ;  $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ .

Без ограничения общности положим  $z_i = 0$ .

С учетом условий излучения на бесконечности функцию  $p_S$  будем искать в виде

$$p_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh. \quad (6.38)$$

При  $|h| > k$  величина  $k_h$  становится мнимой. Выбор знака корня  $\sqrt{k^2 - h^2}$  из условия  $\text{Im } k_h \geq 0$  обеспечивает условие излучения на бесконечности для звукового давления  $p_S$  при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$  при  $-k \leq h \leq k$  и  $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$  при  $|h| > k$ .

Функцию  $p_1$  будем искать в виде разложения

$$p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh \quad (6.39)$$

а функции  $\Psi$ ,  $L$  и  $M$  в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_{1n}(h) J_n(k_1 r) + B_{2n}(h) N_n(k_1 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ L &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n}(h) J_n(k_2 r) + C_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [D_{1n}(h) J_n(k_2 r) + D_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \end{aligned} \quad (6.40)$$

где  $N_n(x)$  – цилиндрическая функция Неймана порядка  $n$ ;  $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$ ,  $k_2 = \sqrt{k_r^2 - h^2}$ .

Подставляя выражение (18) в уравнение (10), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции  $R_n(r, h)$  для каждого  $n$  и  $h$

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + g(r) \frac{\partial R_n}{\partial r} + q(r) R_n = 0, \quad (6.41)$$

где

$$g(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}, \quad q(r) = k_1^2(r) - \frac{n^2}{r^2} - h^2.$$

Подставляя разложения (16)-(19) в граничные условия (13)-(15) и используя выражение для вронскиана [170]

$$J_n(k_h r_1) H'_n(k_h r_1) - J'_n(k_h r_1) H_n(k_h r_1) = 2i/(\pi k_h r_1),$$

получим выражения для неизвестных коэффициентов

$$A_n(h) = (2R_n(r_1, h) - AiH_n(k_h r_i) J_n(k_h r_1)) / 2H_n(k_h r_1), \quad (6.42)$$

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_n,$$

где  $\mathbf{K}_n = (B_{1n}, B_{2n}, C_{1n}, C_{2n}, D_{1n}, D_{2n})^T$ ;  $\mathbf{W}_n = (R_n(r_2, h), 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;  $\mathbf{M}_n = (m_{mqn})_{6 \times 6}$ :

$$m_{1,j,n} = (\lambda k_l^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) - 2\mu k_1^2 r_2^2 Y_n''^{(j)}(k_1 r_2)) / r_2^2, \quad m_{1,j+2,n} = -2ih\mu k_2^2 Y_n''^{(j)}(k_2 r_2),$$

$$m_{1,j+4,n} = 2in\mu k_\tau (Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_2)) / r_2^2,$$

$$m_{2,j,n} = 2in\mu (k_1 r_2 Y_n'^{(j)}(k_1 r_2) - Y_n^{(j)}(k_1 r_2)) / r_2^2,$$

$$m_{2,j+2,n} = 2nh\mu (Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_2)) / r_2^2,$$

$$m_{2,j+4,n} = k_\tau \mu (k_2 r_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_2) - k_2^2 r_2^2 Y_n''^{(j)}(k_2 r_2) - n^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2)) / r_2^2,$$

$$m_{3,j,n} = 2ihk_1 \mu Y_n'^{(j)}(k_1 r_2), \quad m_{3,j+2,n} = \mu Y_n'^{(j)}(k_2 r_2) (k_\tau^2 - 2k_2 h^2),$$

$$m_{3,j+4,n} = -nhk_\tau \mu Y_n^{(j)}(k_2 r_2) / r_2, \quad m_{4,j,n} = k_1 Y_n'^{(j)}(k_1 r_3),$$

$$m_{4,j+2,n} = ihk_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{4,j+4,n} = ink_\tau Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3,$$

$$m_{5,j,n} = inY_n^{(j)}(k_1 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+2,n} = -nhk_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+4,n} = -k_\tau k_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_3),$$

$$m_{6,j,n} = ihY_n^{(j)}(k_1 r_3), \quad m_{6,j+2,n} = k_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{6,j+4,n} = 0,$$

$$j = 1, 2, \quad Y_n^{(1)}(x) = J_n(x), \quad Y_n^{(2)}(x) = N_n(x).$$

И два краевых условия для дифференциального уравнения (20)

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} R_n'(r_1, h) + \beta_{1n} R_n(r_1, h) &= d_{1n}(h), \\ \alpha_{2n} R_n'(r_2, h) + \beta_{2n} R_n(r_2, h) &= 0, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\alpha_{1n} = -1/\rho_1(r_1)\omega, \quad \beta_{1n} = k_h H_n'(k_h r_1) / \rho_0 \omega H_n(k_h r_1), \quad d_{1n} = -A H_n(k_h r_i) / \pi r_1 \rho_0 \omega H_n(k_h r_1),$$

$$\alpha_{2n} = -r_1 / \omega^2 \rho_1(r_2), \quad \beta_{2n} = \mathbf{K}_{2n} \mathbf{T}_n.$$

При этом  $\mathbf{K}_{2n} = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_{2n}$ ;  $\mathbf{W}_{2n} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ;  $\mathbf{T}_n = (t_{1n}, t_{2n}, t_{3n}, t_{4n}, t_{5n}, t_{6n})^T$ :

$$t_{jn} = k_1 r_2 Y_n'^{(j)}(k_1 r_2), \quad t_{j+2,n} = ihk_2 r_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_2), \quad t_{j+4,n} = ink_\tau r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \quad j = 1, 2.$$

Так как коэффициенты  $A_n(h)$ ,  $B_{1n}(h)$ ,  $B_{2n}(h)$ ,  $C_{1n}(h)$ ,  $C_{2n}(h)$ ,  $D_{1n}(h)$ ,  $D_{2n}(h)$  выражены через значения функции  $R_n(r, h)$  при  $r = r_1, r_2$ , то для их вычисления необходимо найти решение краевой задачи (20), (22). Эта краевая задача может быть решена разными численными и аналитическими методами. Например, разностным методом [175], методом стрельбы [175], методом сплайн-коллокации [176].

## 6.20. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие параметры материала упругого покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  в фиксированной точке наблюдения  $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$ .

В качестве меры звукового рассеяния введем величину  $I(\omega) = |p_S(\omega)/A|^2$  – интенсивность звукового рассеяния. Построим функцию вида

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (6.44)$$

выражающую усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для функции (23) необходимо найти такие значения упругих параметров  $\rho, \lambda, \mu$  при которых она достигает минимального значения.

Для параметров функции (23) введем ограничения

$$C_{11} \leq \rho \leq C_{12}, \quad C_{21} \leq \lambda \leq C_{22}, \quad C_{31} \leq \mu \leq C_{32}. \quad (6.45)$$

где  $C_{\zeta 1}, C_{\zeta 2}$  – некоторые положительные константы ( $\zeta = 1, 2, 3$ ).

Поиск значений упругих параметров  $\rho, \lambda, \mu$ , удовлетворяющих условиям (24) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad (6.46)$$

осуществить аналитически не представляется возможным. Однако построенная оптимизационная задача (24), (25) может быть решена численно с использованием какого-либо численного метода многомерной оптимизации [177], что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(h, \omega) dh d\omega. \quad (6.47)$$

Аналитическая запись подинтегральной функции  $F(h, \omega)$  не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (17), (21), (23).

Подынтегральная функция  $F(h, \omega)$  рассчитывается в выбранных точках  $(h_*, \omega_*)$  с использованием краевой задачи (20), (22). Далее интеграл (26) может быть рассчитан численно с использованием многомерных квадратурных формул. Для этого к несобственному интегралу по переменной  $h$  следует применить прием обрезания бесконечных пределов [175], а в качестве метода численного интегрирования может быть использована квадратурная формула на основе параллелепедальной сетки Коробова [178, 179].

Отметим, что для повышения эффективности звукоотражающих свойств рассеивателя, покрытие может быть реализовано не из одного однородного упругого слоя, а из  $N$  однородных упругих слоев аналогично тому как показано в работе [164].

## 6.21. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства

Исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах посвящено большое количество работ. Среди них в ряде работ рассматривались цилиндрические рассеиватели с покрытиями, позволяющими изменять звукоотражающие характеристики тела. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Например, перфорированные покрытия [160], покрытия с протяженной реакцией [161], однородные упругие покрытия [162]. Покрытие в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев было изучено в [163]. Значительный интерес представляют упругие непрерывно-неоднородные покрытия, позволяющие эффективно изменять звукоотражающие характеристики рассеяния тел. Дифракция звуковых волн на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом сплошном цилиндре с изотропными непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалась в [164, 165].

В упомянутых выше работах в качестве источника первичного волнового возмущения использовалась плоская звуковая волна. Однако звуковую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя значительно больше длины волны. На практике приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками, представляет значительный интерес.

Рассеяние цилиндрической волны на упругом цилиндре рассматривалось в [166], а задача дифракции цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием решена в [167]. В работах [166, 167], как и в большинстве известных работ по теории дифракции, где в качестве источника волнового возмущения выбирается линейный источник звуковых колебаний, полагается, что ось источника параллельна оси вращения цилиндрического рассеивателя, что значительно упрощает задачу. Дифракция звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником, на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом с непрерывно-неоднородным покрытием сплошных цилиндрах рассматривалась в [168, 169].

Во всех перечисленных ранее работах полагалось, что цилиндрические тела располагаются в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В работах [170, 171] методом мнимых источников решались задачи рассеяния плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) поверхности. В [160] рассматривался случай нормального падения, а в [171] – случай наклонного падения. В [172] с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа получено решение задачи дифракции звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Используя тот же подход, в [173] была рассмотрена задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. При этом в [172, 173] источником первичного возмущения волновой системы являлся линейный



источник звука, ось которого была параллельна оси цилиндрического рассеивателя.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

## 6.22. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса  $R_0$ , материал которого характеризуется плотностью  $\rho_0$  и упругими постоянными  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом  $R_1$ . Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову  $x, y, z$  и цилиндрическую  $r, \varphi, z$  системы координат так, чтобы их координатные оси  $z$  совпадали с осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости  $\lambda$  и  $\mu$  материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$ , а его плотность  $\rho$  – непрерывной функцией координаты  $r$ . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью  $\rho_*$  и скоростью звука  $c$ , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью  $\rho_1$  и упругими постоянными  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии  $l$ . В системе координат  $x, y, z$  граница упругого полупространства определяется уравнением  $y = -l$ ,  $l > 0$ .

Пусть из жидкого полупространства на цилиндр с покрытием падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, расположенным в плоскости, параллельной поверхности упругого полупространства, ось которого не является параллельной оси цилиндра.

Начало  $O$  координатных систем  $x, y, z$  и  $r, \varphi, z$  выберем на оси  $z$  так, чтобы из точки  $O$  выходил общий перпендикуляр к оси  $z$  и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через  $d$ . Ось  $y$  направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Будем считать, что линейный источник пересекает положительную часть оси  $y$  в точке  $y = d$ ,  $d > 0$ . Осуществим параллельный перенос вдоль оси  $y$  до точки  $O$  прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью  $z_1$  прямоугольной  $x_1, y_1, z_1$  и цилиндрической  $r_1, \varphi_1, z_1$  систем координат с началом в точке  $O$ . При этом ось  $y_1$  совместим с осью  $y$ . Обозначим через  $\alpha$  угол между осями  $z$  и  $z_1$  (рис. 1).

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t), \quad R = \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2}, \quad (6.48)$$

где  $A$  – амплитуда волны;  $H_0(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка;  $k = \omega/c$  – волновое число жидкости;  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим акустическое поле в жидком полупространстве и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном упругом слое.

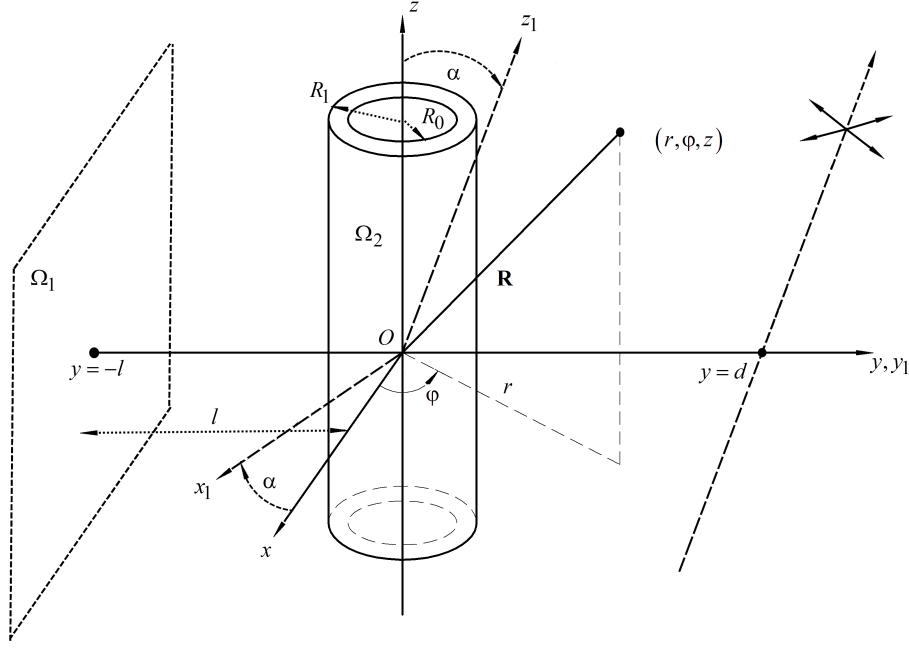


Рис. 6.5: Геометрия задачи.

## 6.23. Аналитическое решение

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде [172]

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (6.49)$$

где  $\Psi_{S1}$  – потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства,  $\Psi_{S2}$  – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Скорость частиц  $\mathbf{v}$  и акустическое давление  $p$  в содержащей жидкости определяются формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega \Psi.$$

Полное звуковое поле в жидком полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца-Кирхгофа [172, 173]

$$\Psi(\mathbf{R}_1) = AG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d) + \iint_{\Omega} \left[ \Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (6.50)$$

Здесь  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$  и  $G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  – двумерная и трехмерная функции Грина для уравнения Гельмгольца;  $\mathbf{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ ,  $\mathbf{r}_d = (0, d, 0)$ ;  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ ,  $\Omega_1$  – поверхность упругого полупространства,  $\Omega_2$  – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности  $\Omega_1$  точка  $\mathbf{R}_2$  находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности  $\Omega_1$ , а в интеграле по поверхности  $\Omega_2$  точка  $\mathbf{R}_2$  находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности  $\Omega_2$ .

Для того, чтобы в (3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности  $\Omega_1$ , и учесть множественные переотражения между цилиндрическим рассеивателем и упругой границей, воспользуемся подходом, предложенным в [172]. Будем использовать функцию Грина вида

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (6.51)$$

где  $G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны  $G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  от поверхности  $\Omega_1$ . Таким образом функция Грина (4) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности  $\Omega_1$ , т.е. является функцией Грина полупространства.

Перепишем интегральное уравнение (3) в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . При этом сравнивая выражения (2) и (3) с учетом (4) заметим, что  $\Psi_0 = AG_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$ ,  $\Psi_{S1} = AG_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$

Прямоугольные координаты  $x, y, z$  и  $x_1, y_1, z_1$  связаны между собой соотношениями

$$x_1 = x \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad y = y_1, \quad z_1 = -x \sin \alpha + z \cos \alpha. \quad (6.52)$$

Воспользуемся интегральным соотношением [174]

$$H_0 \left( k \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i(\xi x_1 + \eta |y_1 + d|)] d\xi, \quad (6.53)$$

где  $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ .

С учетом (1), (5) и (6) получаем для потенциала скорости падающей волны следующее выражение в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ :

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i\xi (r \cos \varphi \cos \alpha + z \sin \alpha) + i\eta |r \sin \varphi + d|] d\xi. \quad (6.54)$$

При  $|\xi| > k$  величина  $\eta$  становится мнимой. Выбор знака корня  $\sqrt{k^2 - \xi^2}$  из условия  $\text{Im } \mu \geq 0$  обеспечивает ограниченность поля падающей волны  $\Psi_0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$  при  $-k \leq \xi \leq k$  и  $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$  при  $|\xi| > k$ .

Заметим, что на поверхности цилиндра  $r \sin \varphi + d > 0$ . Будем иметь

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \exp[ir(\xi \cos \varphi \cos \alpha + \eta \sin \varphi)] d\xi. \quad (6.55)$$

Заменим в выражении, стоящем в (8), величины  $\xi$  и  $\eta$  величинами  $\beta$  и  $\gamma$  с помощью соотношений  $\xi \cos \alpha = \beta \sin \gamma$ ,  $\eta = -\beta \cos \gamma$ . Тогда вместо (8) получим

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \exp[-i\beta r \sin(\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (6.56)$$

где  $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$ ,  $\gamma = \text{arctg}(-\xi \cos \alpha / \eta)$ .

Подынтегральное выражение в (9) имеет вид плоской волны, падающей наклонно на цилиндр. При этом  $(\xi \sin \alpha)^2 + \beta^2 = k^2$ .

Используя известное разложение [175]

$$\exp [\pm i\beta r \sin (\varphi - \gamma)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^n J_n (\beta r) \exp [in (\varphi - \gamma)], \quad (6.57)$$

где  $J_n (x)$  – цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ , получим разложение падающей цилиндрической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (id\eta)}{\eta} \exp (i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n (\beta r) \exp [in (\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (6.58)$$

Потенциал  $\Psi_{S1}$  описывает волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности границы раздела жидкой и упругой среды, заключающимся в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при  $y_1 = -l$ :

$$-i\omega u_{y_1} = \frac{\partial (\Psi_0 + \Psi_{S1})}{\partial y_1}, \quad \sigma_{y_1 y_1} = -i\omega \rho_* (\Psi_0 + \Psi_{S1}), \quad \sigma_{x_1 y_1} = 0.$$

где  $u_{y_1}$  и  $\sigma_{y_1 y_1}$ ,  $\sigma_{x_1 y_1}$  – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве в прямоугольной системе координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ .

Потенциал  $\Psi_{S1}$  в прямоугольной системе координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  будет иметь вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1 (\xi) \exp [i (\xi x_1 + \eta (d - y_1))] \frac{d\xi}{\eta},$$

где  $A_1 (\xi) = \exp (i2l\eta) A'_1 (\xi)$ . Коэффициент  $A'_1 (\xi)$  находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной  $\xi$  и вертикальной  $-\eta$  компонентами волнового вектора  $\mathbf{k}_1$ , в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [176]. В цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  потенциал  $\Psi_{S1}$  с учетом (10) примет вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1 (\xi) \frac{\exp (id\eta)}{\eta} \exp (i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n (\beta r) \exp [in (\varphi + \gamma)] d\xi. \quad (6.59)$$

Поле, рассеянное упругим цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием, в соответствии с (2), (3) будем искать в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа [177]

$$\Psi_{S2} (\mathbf{R}) = \iint_{\Omega_2} \left[ \Psi (\mathbf{R}_2) \frac{\partial G (\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi (\mathbf{R}_2)}{\partial n} G (\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (6.60)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  – точка наблюдения в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ .

Трехмерная функция Грина (4) согласно [178] в цилиндрической системе координат имеет вид

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh,$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

$$k_h = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (6.61)$$

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}(h) dh,$$

$$g_s(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_2(\theta, h) \exp[i(2k_h l \cos \theta + s\theta)] d\theta. \quad (6.62)$$

где  $H_n(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ ;  $\Gamma$  – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости  $\theta$  (пределы интегрирования от  $-\pi/2 + i\infty$  до  $\pi/2 - i\infty$ ).  $A_2(\theta, h)$  – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент  $A_2(\theta, h)$  находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается волновым вектором  $\mathbf{k}_2 = (k_h \xi/k, -k_h \eta/k, h) = (k_h \sin \theta, -k_h \cos \theta, h)$ , в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [178].

Различные подходы к вычислению интегральных коэффициентов  $g_s(h)$ , входящих в (15), обсуждались в работах [173, 178].

Теперь воспользуемся результатами работы [169].

Согласно [169] компоненты вектора смещения в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$u_r = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi,$$

$$u_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi,$$

$$u_z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (6.63)$$

где функции  $U_{1q}(r, \xi)$ ,  $U_{2q}(r, \xi)$ ,  $U_{3q}(r, \xi)$  для каждого  $q$  и  $\xi$  являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q U_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q U_q' + \hat{\mathbf{C}}_q U_q = 0, \quad (6.64)$$

где  $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, \xi), U_{2q}(r, \xi), U_{3q}(r, \xi))^T$ ;  $\widehat{\mathbf{A}}_q, \widehat{\mathbf{B}}_q, \widehat{\mathbf{C}}_q$  – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в [169].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при  $r = R_1$ :

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (6.65)$$

где  $u_r$  и  $v_r$  – нормальные компоненты векторов смещения и скорости;  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$  – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [179] с учетом (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ (\lambda + 2\mu) U'_{1q}(r, \xi) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r, \xi) + iqU_{2q}(r, \xi) + i\xi r U_{3q}(r, \xi) \sin \alpha) \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{r\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[ \frac{iq}{r} U_{1q}(r, \xi) + U'_{2q}(r, \xi) - \frac{U_{2q}(r, \xi)}{r} \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{rz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu [U'_{3q}(r, \xi) + i\xi U_{1q}(r, \xi) \sin \alpha] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (6.66)$$

где  $\Phi_q(\varphi, z, \xi) = \exp \{i[\xi z \sin \alpha + q(\varphi - \gamma)]\}$ .

Подставим в правую часть уравнения (2) формулы (11)-(13) и устремим точку наблюдения на поверхность  $\Omega_2$ . Подставим в левую часть (3) полное акустическое поле, выраженное через нормальное напряжение на поверхности цилиндра с помощью второго граничного условия (18). Далее подставим функцию Грина (4) в виде суммы (14) и (15) в подынтегральное выражение из (13), где следует воспользоваться нижней строкой формулы (14). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной  $r_2$ . После проведения указанных операций следует положить  $r = r_2 = R_1$ . Далее воспользуемся первыми двумя граничными условиями (18). Подставим в подынтегральное выражение потенциал полного акустического поля и его нормальную производную на поверхности цилиндра, выраженные через компоненты вектора смещения при помощи условий равенства на ней нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости и равенстве нормального напряжения и акустического давления. С учетом выражений (16) осуществим интегрирование по поверхности цилиндра ( $d\Omega_2 = R_1 d\varphi_2 dz_2$ ,  $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ ,  $z_2 \in (-\infty, \infty)$ ). Осуществляя интегрирование по переменной  $z_2$  будем пользоваться следующими свойствами [?]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(h - \xi \sin \alpha) z_2] dz_2 &= 2\pi \delta(h - \xi \sin \alpha), \\ \int_a^b f(h) \delta(h - \xi \sin \alpha) dh &= f(\xi \sin \alpha), \quad h \in [a, b], \end{aligned}$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

В результате получаем краевое условие для нахождения частного решения системы (17) при  $r = R_1$

$$\begin{aligned}
& F_{1q}U'_{1q}(R_1, \xi) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(R_1, \xi) + F_{3q}U_{2q}(R_1, \xi) + F_{4q}U_{3q}(R_1, \xi) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ F_{1n}U'_{1n}(R_1, \xi) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(R_1, \xi) + F_{3n}U_{2n}(R_1, \xi) + F_{4n}U_{3n}(R_1, \xi) \right] F_{5qn} = X_q(\xi) \\
& q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad \xi = -\infty, \dots, \infty, \quad \xi \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{6.67}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{1q} &= \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)], \\
F_{2q}^{(j)} &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[ \frac{\lambda(R_1)}{R_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(\beta R_1)}{\beta Z_q'^{(j)}(\beta R_1)} \right], \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1\rho_*\omega}, \\
F_{4q} &= -\frac{\xi\lambda(R_1)\sin\alpha}{\rho_*\omega}, \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J'_n(\beta R_1)}{H'_q(\beta R_1)} g_{n+q}(\xi \sin\alpha), \\
Z_q^{(1)}(\beta R_1) &= H_q(\beta R_1), \quad Z_q^{(2)}(\beta R_1) = J_q(\beta R_1), \\
X_q(\xi) &= -\frac{2A \exp(id\eta)}{i\pi^2\eta\beta R_1 H'_q(\beta R_1)} [(-1)^q + A_1(\xi) \exp(i2q\gamma)].
\end{aligned}$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (17) при  $r = R_1$ , находим из третьего и четвертого граничных условий (18) с учетом (19)

$$\begin{aligned}
iqU_{1q}(R_1, \xi) + R_1U'_{2q}(R_1, \xi) - U_{2q}(R_1, \xi) &= 0, \\
U'_{3q}(R_1, \xi) + i\xi U_{1q}(R_1, \xi) \sin\alpha &= 0.
\end{aligned} \tag{6.68}$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при  $r = R_0$ :

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \tag{6.69}$$

где  $u_{0r}, u_{0\varphi}, u_{0z}$  и  $\sigma_{0rr}, \sigma_{0r\varphi}, \sigma_{0rz}$  – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [169], из (22) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (16) при  $r = R_0$

$$\left( \frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \mathbf{T}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=R_0} = 0. \tag{6.70}$$

Компоненты матрицы  $\mathbf{T}_q$  в уравнении (23) приведены в [169].

Решений краевой задачи (17), (20), (21), (23) может быть найдено методом сплайн-коллокации [?] для  $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N - 1, N$ , где в качестве порядка усечения

выбирается величина  $N = 2[kR_1] + 1$ , где  $[\cdot]$  – целая часть числа. Используя найденные на поверхности рассеивателя значения функций  $U_{1q}(R_1, \xi)$ ,  $U_{2q}(R_1, \xi)$ ,  $U_{3q}(R_1, \xi)$ , а также первые два граничные условия (18), получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Полное рассеянное поле определим выражением

$$\Psi_S = \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (6.71)$$

где  $\Psi_{S1}$  определяется формулой (10), а  $\Psi_{S2}$  интегральным выражением (11).

Подставим в (13) первые два граничных условия (18), а также функцию Грина в виде (4), в которой первое слагаемой определяется нижней строчкой формулы (14), а второе слагаемое формулой (15). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{S2}(\mathbf{R}) = & \frac{i\pi R_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{q=-\infty}^{\infty} [W_{1q}U'_{1q}(R_1, \xi) + W_{2q}U_{1q}(R_1, \xi) + \\ & + W_{3q}U_{2q}(R_1, \xi) + W_{4q}U_{3q}(R_1, \xi)] \times \\ \times & \left[ H_q(\beta r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(\xi \sin \alpha) \right] \exp(-iq\gamma) d\xi, \quad (6.72) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_{1q} = & \frac{i[\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)]}{\rho_*\omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{2q} = \frac{i\lambda(R_1)}{R_1\rho_*\omega} \beta J'_q(\beta R_1) + i\omega J_q(\beta R_1), \\ W_{3q} = & -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1\rho_*\omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{4q} = -\frac{\xi\lambda(R_1)\sin \alpha}{\rho_*\omega} \beta J'_q(\beta R_1). \end{aligned}$$

## 6.24. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  в фиксированной точке наблюдения  $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$ .

Будем считать, что функции  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной  $r$ , то есть будем рассматривать следующие законы параболические законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\zeta(r) = \zeta^0 \cdot \bar{\zeta}(r), \quad (6.73)$$

где

$$\bar{\zeta}(r) = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)}r + \zeta^{(2)}r^2, \quad (6.74)$$

где  $\zeta^0$  – характерная величина материала покрытия. Здесь и далее под символом  $\eta$  подразумевается каждая из величин  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .



В качестве меры звукового рассеяния введем величину  $I(\omega) = |\Psi_S(\omega)/A|^2$  – интенсивность звукового рассеяния. Построим функционал вида

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (6.75)$$

определенный на классе квадратичных функций (26) и выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для построенного функционала найдем такие значения коэффициентов функций (27), при которых он достигает минимального значения. Для функций (27), определенных на отрезке  $[R_0, R_1]$ , введем ограничения

$$C_{1\zeta} \leq \bar{\zeta}(r) \leq C_{2\zeta}, \quad (6.76)$$

где  $C_{1\zeta}, C_{2\zeta}$  – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (29) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс  $r$  и осью ординат  $f(r)$  бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$G(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) = \{(r, f) : R_0 \leq r \leq R_1, C_{1\zeta} \leq f \leq C_{2\zeta}\}.$$

В области  $G$  каждая функция  $f(r)$  единственным образом определяется тремя точками  $G_{0\zeta}(R_0, f_{0\zeta}), G_{1\zeta}(\bar{r}, f_{1\zeta}), G_{2\zeta}(R_1, f_{2\zeta})$ , где  $\bar{r} = (R_0 + R_1)/2$ ,  $f_{q\zeta} \in [C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$  ( $q = 0, 1, 2$ ).

Подставляя значения точек  $G_{0\zeta}, G_{1\zeta}, G_{2\zeta}$  в выражение (27), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$ . Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \zeta^{(0)} &= [f_{0\zeta} R_1 \bar{r} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} R_1 R_0 (r_1 - R_0) + f_{2\zeta} \bar{r} R_0 (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(1)} &= [f_{0\zeta} (R_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\zeta} (R_0^2 - r_1^2) + f_{2\zeta} (\bar{r}^2 - R_0^2)] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(2)} &= [f_{0\zeta} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} (R_1 - R_0) + f_{2\zeta} (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \Delta_\zeta &= (R_1 - R_0) (R_1 R_0 - R_1 \bar{r} - R_0 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Выбирая из отрезка  $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$  значения ординат  $f_{0\zeta}, f_{1\zeta}, f_{2\zeta}$  и вычисляя с помощью соотношений (30) значения коэффициентов  $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$ , получаем квадратичные законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$R_0 \leq -\zeta^{(1)} / (2\zeta^{(2)}) \leq R_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку  $[R_0, R_1]$ . В этом случае параболу следует рассматривать только в том случае, если ордината ее вершины принадлежит отрезку  $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ , то есть, когда выполняется условие

$$C_{1\zeta} \leq \zeta^{(0)} - \zeta^{(1)2} / (4\zeta^{(2)}) \leq C_{2\zeta}.$$

Поиск значений коэффициентов  $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$  функций (27), удовлетворяющих условиям (29) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \rightarrow \min, \quad (6.78)$$

может быть осуществлен с помощью алгоритма имитации отжига аналогично тому, как показано в [?].

Введем для ординаты  $f_{q\zeta}$  ( $q = 0, 1, 2$ ) точки  $G_{q\zeta}$  на отрезке  $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$  равномерную сетку  $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})} = C_{1\zeta} + l_{q\zeta}\tilde{h}$ . Здесь  $l_{q\zeta}$  – номер узла сетки,  $\tilde{h} = (C_{2\zeta} - C_{1\zeta})/\tilde{n}$  – шаг сетки,  $\tilde{n}$  – количество равных частей, на которые разбит отрезок  $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ .

Алгоритм имитации отжига относится к алгоритмам типа случайного поиска и сводит задачу поиска минимального значения к некоторому перебору значений  $\Phi$  на сетке  $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})}$ , что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \omega) d\xi d\omega. \quad (6.79)$$

Аналитическая запись подынтегральной функции  $F(\xi, \omega)$  не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (12), (25), (28).

Оценить интеграл (32) аналитически не представляется возможным, и он подлежит только численному расчету. При этом к несобственному интегралу по переменной  $\xi$  может быть применен прием обрезания бесконечных пределов [?]. Подынтегральная функция  $F(\xi, \omega)$  определяется дискретным набором значений, вычисляемых в заданных точках  $(\xi_*, \omega_*)$  при решении краевой задачи (17), (20), (21), (23). Вычислительный процесс решения построенной краевой задачи является достаточно трудоемким, что приводит к необходимости выбора наиболее оптимального метода численного интегрирования для интегралов (32): имеющего достаточно высокую точность и требующего как можно меньшего числа узлов  $(\xi_*, \omega_*)$ . В качестве такого метода может быть использована квадратурная формула на основе параллелепедальной сетки Коробова [?, ?].

## 6.25. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля  $|\Psi_S(\varphi)/A|$  в дальней зоне при  $r_* = 100$  в плоскости  $z_* = 0$ .

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ( $\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) радиуса  $R_0 = 0.8$  с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 располагается в полупространстве, заполненном водой ( $\rho_* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние  $l = 1 + R_1$ . Упругое полупространство характеризуется параметрами:  $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью  $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и характерными модулями упругости  $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> (поливинилбутираль), так и неоднородные, механические характеристики которых менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (R_1 - r) / (R_1 - R_0) + 0.5, \quad R_0 \leq r \leq R_1.$$

Полагалось, что линейный источник отстоит от центра основной координатной системы на расстоянии  $d = 1 + R_1$  и генерирует звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела  $kR_1 = 5$ .

На рис. 2 – 3 представлены диаграммы направленности рассеянного поля в области  $\varphi \in [0, \pi]$ . На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла  $\varphi$ . Штриховые линии соответствуют цилиндру с однородным покрытием, сплошные линии – цилиндру с неоднородным покрытием.

На рис. 2 и 3 приведены кривые, рассчитанные для случаев, когда  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/4$  соответственно.

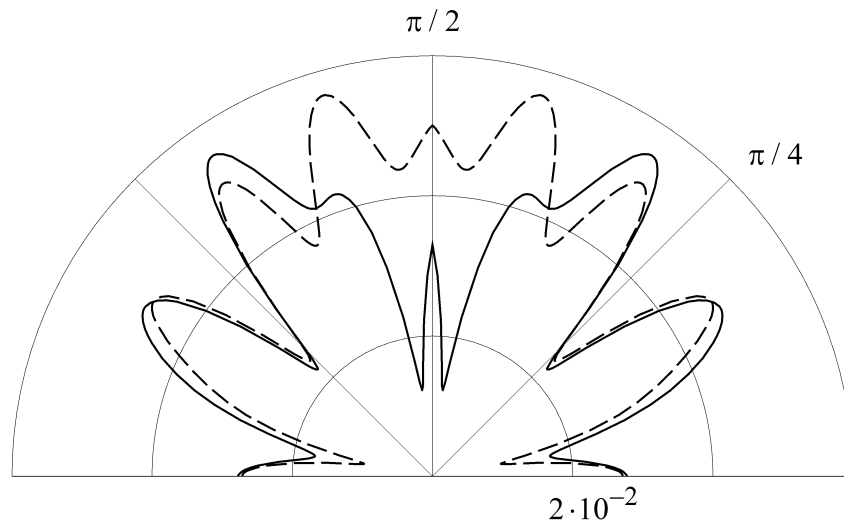


Рис. 6.6: Диаграммы направленности рассеянного поля,  $\alpha = 0$ .

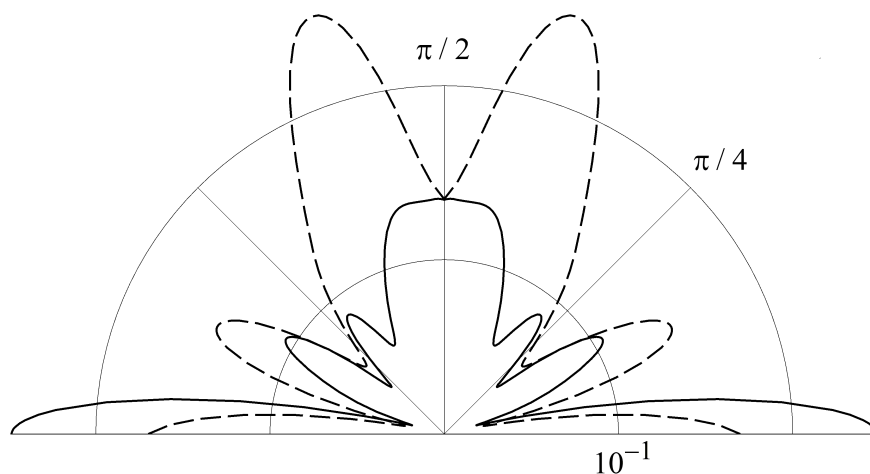


Рис. 6.7: Диаграммы направленности рассеянного поля,  $\alpha = \pi/4$ .

Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (27), обеспечивающих минимальное рассеяние звука при угле поворота источника  $\alpha = \pi/4$ .

В ограничениях (29) полагалось  $C_{1\zeta} = 0.5$ ,  $C_{2\zeta} = 1.5$  для всех функций  $\zeta = \rho, \lambda, \mu$ .

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига [?] – шаг сетки  $\tilde{h} = 0.125$ , размерность пространства параметров –  $w = 9$ , диапазон изменения температуры кристаллизации процесса  $[T_{\min}, T_{\max}] = [5.9, 10]$ . Для квадратурной формулы на основе параллелепедальной сетки Коробова при вычислении интегралов (32) задавались параметры [?]:  $a = 196$ ,  $N = 513$ .

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием в фиксированной точке наблюдения  $(r_*, \varphi_*, z_*) = (100, \pi/2, 0)$  в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке  $4 \leq kR_1 \leq 5$  имеют вид

$$\begin{aligned}\rho &= 1.07 \cdot 10^3 \cdot 0.5, \\ \lambda &= 3.9 \cdot 10^9 (-12.5r^2 + 27.5r - 13.5), \\ \mu &= 9.8 \cdot 10^8 (-18.75r^2 + 34.375r - 15).\end{aligned}\tag{6.80}$$

Для оптимальных законов неоднородности (33) значение функционала  $\Phi = 14.93 \cdot 10^{-3}$ . Для оценки эффективности покрытия оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала  $\Phi$  для упругого цилиндра без покрытия, равное  $20.8 \cdot 10^{-3}$ .

## 6.26. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде

Рассеяние звуковых волн на телах цилиндрической формы с неоднородными покрытиями рассматривалось в ряде работ. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием исследовано в [1, 2]. В [1] рассмотрен случай нормального падения волны на абсолютно жесткий цилиндр, а в [2] — случай наклонного падения на упругий цилиндр. В работе [3] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн на дискретно-неоднородном упругом цилиндре. Решение задач о дифракции сферических и цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием получены в [4 – 6]. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием изучено в [7]. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрическое тело находится в неподвижной среде. В [8] рассмотрено рассеяние плоской звуковой волны ограниченной цилиндрической оболочкой в движущейся среде в предположении, что края оболочки закреплены в жесткий безграничный цилиндрический экран.

В настоящей работе находится решение задачи о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой цилиндр, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем и находящийся в движущейся среде.

## 6.27. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса  $r_0$ . Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $r_1$ . Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью вращения цилиндра. Свяжем с координатами  $x, y, z$  цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ . Полагаем, что модули упругости  $\lambda$  и  $\mu$  материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты  $r$ , а плотность  $\rho$  — непрерывной функцией координаты  $r$ . Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, характеризующейся плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c$ . Жидкость движется с постоянной скоростью  $V$ , меньшей скорости звука, вдоль образующей цилиндра в положительном направлении оси  $z$ .

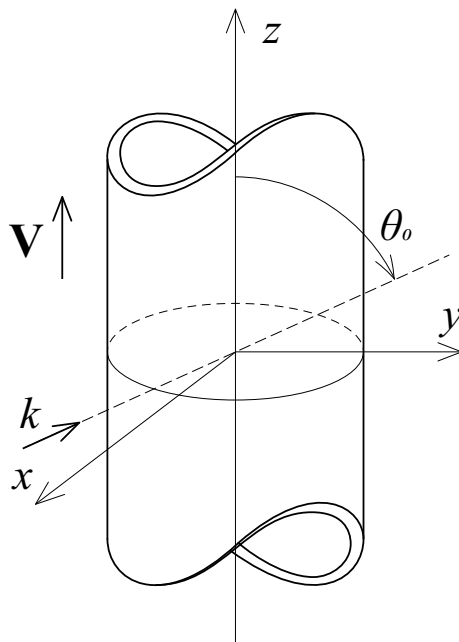


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть на цилиндр наклонно падает плоская монохроматическая звуковая волна давления  $p_i$ . Без ограничения общности будем полагать, что волновой вектор падающей волны  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xOz$  и азимутальный угол падения волны  $\varphi_0 = 0$ . С положительным направлением оси  $z$  волновой вектор составляет полярный угол  $\theta_0$  (рис. 1).

Определим отраженную от цилиндра волну, а также найдем поле смещений в неоднородном слое.

## 6.28. Аналитическое решение задачи

Распространения звука в однородной, поступательно движущейся среде со скоростью  $\mathbf{V}$  описывается уравнением [9]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla) (\mathbf{V} \cdot \nabla) p = 0. \quad (1)$$

В случае гармонических колебаний с временной зависимостью  $e^{-i\omega t}$  и при  $\mathbf{V} = (0, 0, V)$  уравнение (1) принимает вид

$$\Delta p + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0. \quad (2)$$

Здесь  $p$  — звуковое давление во внешней среде;  $k = \omega/c$  — волновое число;  $M = V/c < 1$  — число Маха;  $t$  — время.

Представим падающую плоскую волну в виде

$$p_i = A_0 \exp[i(k_r r \cos \varphi + k_z z - \omega t)], \quad (3)$$

где  $A_0$  — амплитуда волны. В дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

Для падающей волны (3) с отношением  $k_z/k_r = \text{ctg } \theta_0$  из уравнения (2), записанного в цилиндрической системе координат ( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ), получим

$$k_r = \frac{k \sin \theta_0}{1 + M \cos \theta_0}, \quad k_z = \frac{k \cos \theta_0}{1 + M \cos \theta_0}. \quad (4)$$

Давление в полном акустическом поле  $p = p_i + p_s$ , где  $p_s$  — звуковое давление в рассеянной волне. Акустическое поле будет симметрично относительно плоскости  $xOz$ .

Давление  $p_i$  представим в виде [10]

$$p_i(r, \varphi, z) = A_0 e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) i^n J_n(k_r r) \cos n\varphi, \quad (5)$$

где  $J_n$  — цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ .

С учетом условия излучения на бесконечности [10] давление  $p_s$  будем искать в виде

$$p_s(r, \varphi, z) = e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(k_r r) \cos n\varphi, \quad (6)$$

где  $H_n$  — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ . Разложение (6) удовлетворяет уравнению (2) при выполнении соотношений (4).

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в цилиндрической системе координат в случае установившихся колебаний имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho(r) u_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_r, u_\varphi, u_z$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц неоднородного слоя;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном изотропном упругом покрытии записываются следующим образом [11]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda(r)\operatorname{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda(r)\operatorname{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}\right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r)\operatorname{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \\ \sigma_{rz} &= \mu(r)\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu(r)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right),\end{aligned}$$

где  $\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Используя эти соотношения, запишем уравнения (7) через компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$ . Получим

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \\ + \frac{(\lambda + \mu)}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r}\left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \\ + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} + \lambda'\frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_r = 0, \\ \frac{(\lambda + \mu)}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r}\left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \\ + \mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{(\lambda + \mu)}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi\partial z} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_\varphi = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + \left(\mu' + \frac{\lambda + \mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{(\lambda + \mu)}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\varphi^2} + \\ + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega^2\rho u_z = 0,\end{aligned}\tag{8}$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ .

Так как неоднородность материала покрытия проявляется лишь в радиальном направлении, то зависимость компонент вектора смещения  $\mathbf{u}$  от координаты  $z$ , согласно закону Снеллиуса, имеет вид  $e^{ik_z z}$ . Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому функции  $u_r(r, \varphi, z)$ ,  $u_\varphi(r, \varphi, z)$  и  $u_z(r, \varphi, z)$  будем искать в виде

$$\begin{aligned}u_r &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(r) \cos n\varphi, & u_\varphi &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(r) \sin n\varphi, \\ u_z &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{3n}(r) \cos n\varphi.\end{aligned}\tag{9}$$

При этом вид зависимостей от  $\varphi$  в этих разложениях определяется соотношениями симметрии вектора смещения  $\mathbf{u}$  относительно плоскости  $\varphi = 0, \pi$ .

Подставляя выражения (9) в уравнения (8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $u_{1n}(r)$ ,  $u_{2n}(r)$  и  $u_{3n}(r)$  для каждого  $n$ :

$$\hat{A}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n \mathbf{U}_n' + \hat{C}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T$ ;  $\hat{A}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{B}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{C}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$  — матрицы третьего порядка;

$$\begin{aligned} a_{n11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, & a_{n22} &= a_{n33} = \mu r^2, & a_{nij} &= 0 \quad (i \neq j), \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, & b_{n12} &= n(\lambda + \mu)r, & b_{n13} &= ik_z(\lambda + \mu)r^2, \\ b_{n21} &= -n(\lambda + \mu)r, & b_{n22} &= \mu' r^2 + \mu r, & b_{n23} &= 0, \\ b_{n31} &= ik_z(\lambda + \mu)r^2, & b_{n32} &= 0, & b_{n33} &= \mu' r^2 + \mu r, \\ c_{n11} &= \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2 + k_z^2 r^2)\mu + \omega^2 \rho r^2, & c_{n12} &= n(\lambda' r - \lambda - 3\mu), \\ c_{n13} &= ik_z \lambda' r^2, & c_{n21} &= -n(\mu' r + \lambda + 3\mu), \\ c_{n22} &= -\mu' r - n^2 \lambda - (2n^2 + k_z^2 r^2 + 1)\mu + \omega^2 \rho r^2, & c_{n23} &= -ink_z(\lambda + \mu)r, \\ c_{n31} &= ik_z[\mu' r^2 + (\lambda + \mu)r], & c_{n32} &= ink_z(\lambda + \mu)r, \\ c_{n33} &= -(n^2 + 2k_z^2 r^2)\mu - k_z^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_n$  разложения (6) и функции  $u_{1n}(r)$ ,  $u_{2n}(r)$ ,  $u_{3n}(r)$  из разложений (9) подлежат определению из граничных условий.

Граничное условие на внешней поверхности неоднородного слоя (при  $r = r_1$ ), связывающее акустическое давление в жидкости и смещение частиц упругой среды, имеет вид [8, 12, 13]

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \rho \omega^2 \left( 1 + i \frac{M}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u_r(r_1, \varphi, z). \quad (11)$$

Кроме того, граничные условия при  $r = r_1$  заключаются в равенстве нормального напряжения и акустического давления и в отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1 : \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (12)$$

На внутренней поверхности слоя  $r = r_0$  должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$r = r_0 : \quad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (13)$$

Подставляя (5), (6) и первое выражение (9) в (11), находим коэффициенты  $A_n$ , выраженные через величины  $u_{1n}(r_1)$

$$A_n = \frac{1}{k_r H_n'(k_r r_1)} \left[ -A_0 k_r (2 - \delta_{0n}) i^n J_n'(k_r r_1) + \rho \omega^2 \left( 1 - \frac{M}{k} k_z \right)^2 u_{1n}(r_1) \right] \quad (14)$$

где штрихи означают дифференцирование по аргументу.



Из оставшихся неиспользованными граничных условий с учетом (14) и выражения для вронскиана  $J_n(x)H'_n(x) - J'_n(x)H_n(x) = \frac{2i}{\pi x}$  получаем шесть краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (10)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r^2} \hat{A}_n \mathbf{U}'_n + \hat{D}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} &= \hat{E}_n, \\ \mathbf{U}_n|_{r=r_0} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где элементы матриц  $\hat{D}_n = (d_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{E}_n = (e_{nj})_{3 \times 1}$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} d_{n11} &= \frac{\lambda}{r} + \rho\omega^2 \left( 1 - \frac{M}{k} k_z \right)^2 \frac{H_n(k_r r)}{k_r H'_n(k_r r)}, & d_{n12} &= \frac{n\lambda}{r}, & d_{n13} &= ik_z \lambda, \\ d_{n21} &= -\frac{n\mu}{r}, & d_{n22} &= -\frac{\mu}{r}, & d_{n31} &= ik_z \mu, & d_{n23} &= d_{n32} = d_{n33} = 0, \\ e_{n1} &= -\frac{2i^{n+1} A_0 (2 - \delta_{0n})}{\pi k_r r_1 H'_n(k_r r_1)}, & e_{n2} &= e_{n3} = 0. \end{aligned}$$

Краевая задача (10), (15) может быть решена различными методами.

После решения краевой задачи (10), (15) по формуле (14) вычисляются коэффициенты  $A_n$ . В результате получаем аналитическое описание волновых полей вне и внутри упругого покрытия с помощью выражений (6) и (9).

Рассмотрим дальнюю зону рассеянного акустического поля.

Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [14] ( $k_r r \gg 1$ )

$$H_n(k_r r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}} \exp \left[ i \left( k_r r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

из (6) находим

$$p_s = \sqrt{\frac{r_0}{2r}} \exp \left[ i \left( k_z z + k_r r - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k_r r_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n \cos n\varphi. \quad (16)$$

Выражения (6), (14) и (16) можно использовать для расчета акустического поля, рассеянного движущимся цилиндром в неподвижной среде. Для этого следует перейти от системы координат  $r, \varphi, z$  к системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$ , движущейся со средой, с помощью соотношений

$$r^1 = r, \quad \varphi^1 = \varphi, \quad z^1 = z + Vt.$$

В системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$  жидкость неподвижна, а цилиндр движется со скоростью  $V$  в направлении, противоположном оси  $z_1$ .

Отметим, что частота колебаний в движущейся системе координат  $r, \varphi, z$  будет отличаться от частоты колебаний в неподвижной системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$  (относительно среды). Если расстояние  $R$  от центра системы  $r, \varphi, z$  до точки наблюдения изменяется

не слишком быстро, то частота колебаний  $\omega_1$  для неподвижного относительно среды наблюдателя определяются по формуле [9]

$$\omega_1 = \omega \left(1 - M \frac{z}{R}\right) / (1 - M^2),$$

выражающей эффект Доплера.

## 6.29. Численные исследования

С помощью выражения (16) для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля  $|F(\varphi)|$  были рассчитаны диаграммы направленности, позволяющие оценить звукоотражающие свойства тела в различных направлениях.

Были проведены расчеты  $|F(\varphi)|/A_0$  для цилиндра, находящегося в воде ( $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с), при нормальном падении плоской волны ( $\theta_0 = \pi/2$ ). Полагалось, что отношение внешнего радиуса цилиндрического слоя  $r_1$  к внутреннему радиусу  $r_0$  равно 1.1, а  $r_0 = 1$  м. Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью  $\bar{\rho} = 1.07 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и модулями упругости  $\bar{\lambda} = 3.9 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\bar{\mu} = 9.8 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> (поливинил), так и для неоднородного покрытия, механические характеристики которого менялись по толщине цилиндрического слоя по законам

$$\rho = \bar{\rho}f(r), \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad \mu = \bar{\mu},$$

$$f_1(r) = 5 - 4 \left(\frac{r_1 - r}{r_1 - r_0}\right)^2, \quad f_2(r) = 5 - 4 \left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}\right)^2.$$

Зависимости  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  выбраны такими, что их графики являются зеркальным отображением друг друга относительно прямой  $r = (r_0 + r_1)/2$ . При этом на внешней поверхности покрытия функция  $f_1(r)$  достигает максимума, а на внутренней поверхности покрытия — минимума. Функция  $f_2(r)$  достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внутренней и внешней поверхностях покрытия.

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для волнового размера цилиндра  $kr_0 = 5$  при разных значениях числа Маха  $M$ .

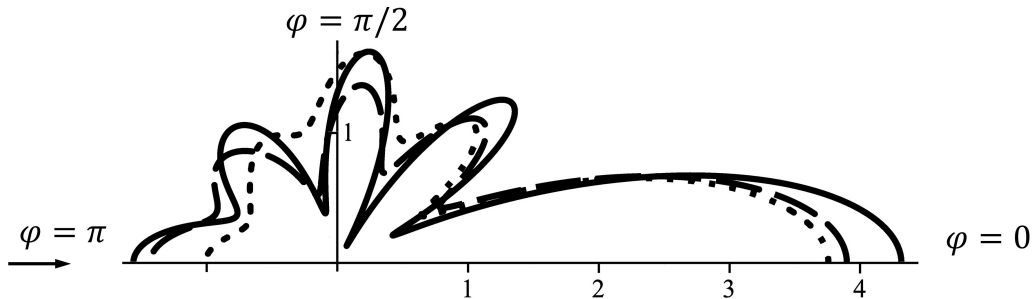
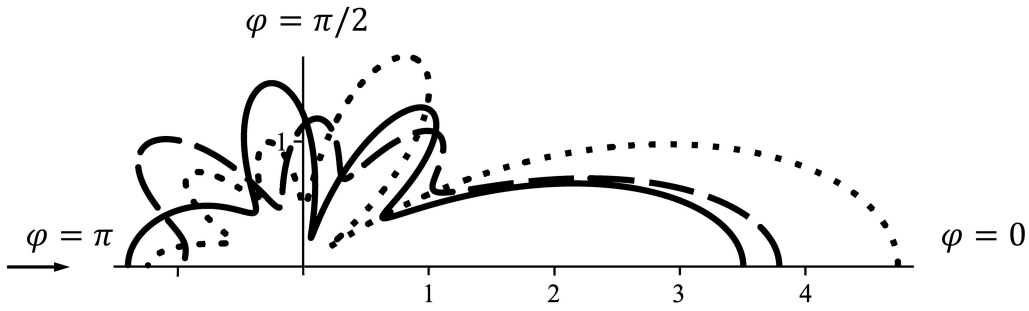


Рис. 2: Диаграммы направленности при  $M = 0$

Рис. 3: Диаграммы направленности при  $M = 0.3$



На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния  $|F|/A_0$ , вычисленной для соответствующих значений угла  $\varphi$ . Ввиду симметрии рассеянного акустического поля при нормальном падении плоской волны диаграммы приведены для значений  $\varphi$  из интервала  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ . На рисунках сплошная линия соответствует однородному покрытию, штриховая — неоднородному покрытию вида  $f_1(r)$ , пунктирная — неоднородному покрытию вида  $f_2(r)$ . Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

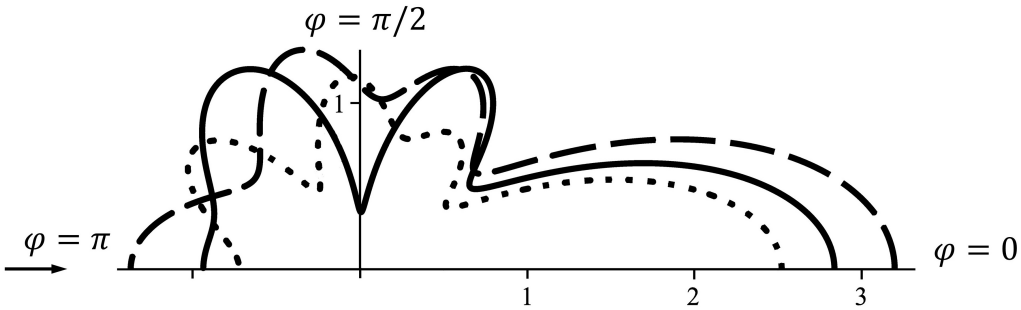


Рис. 4: Диаграммы направленности при  $M = 0.6$

Расчеты показали, что диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне существенно изменяются при различных значениях числа  $M$  для разных законов неоднородности упругого покрытия.

## Глава 7

# Решение задачи дифракции плоской звуковой волны методом граничных элементов

### 7.1. Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы

Решение задачи рассеяния звука объектами сложной формы представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. В теоретическом аспекте важно получить решения новых задач с оценкой влияния параметров среды, падающей волны, формы препятствия, а также используемых методов и алгоритмов на точность решения. В практическом аспекте необходимо создать основу для разработки инженерных технологий, применяемых в задачах обнаружения, идентификации, диагностики и дефектоскопии.

Прямые и обратные задачи дифракции звука на акустических объектах в жидкой среде исследовались, например, в работах [180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189]. В последние годы значительное внимание уделяется случаям, когда акустические препятствия обладают неоднородной структурой. Подобные задачи рассматриваются в работах [180, 183, 184, 185, 188]. Статьи [182, 184, 187, 189] посвящены решению обратных задач, основная сложность которых заключается в определении геометрических и материальных параметров рассеивающих акустических областей.

В сборнике [188] представлены работы, посвященные решению различных задач рассеяния ультразвука на биологических тканях, которые в механическом смысле моделируются как акустические среды, характеризующиеся плотностью и скоростью звука.

В данной работе рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны жидким телом сложной неканонической формы (раздел 7.2). Модель процесса формируется на основе уравнений гидродинамики идеальной жидкости (см. раздел 7.2). Проводится сравнение двух численно-аналитических методов решения, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). Описание и ключевые соотношения для применения численных методов в случае МКЭ даны в разделе 7.3, а для МГЭ — в разделе 7.4. Также в разделах 7.2 и 7.4 приведено известное аналитическое решение задачи рассеяния для шара, полученное разными способами, которое использовалось для теоретического и численного обоснования ме-

тодов. В разделе 7.5 приведены результаты решения задачи рассеяния, полученные обоими методами, и их сравнение на примере жидкого тела, состоящего из объединения двух сфер одинакового радиуса (см. рис. 7.1).

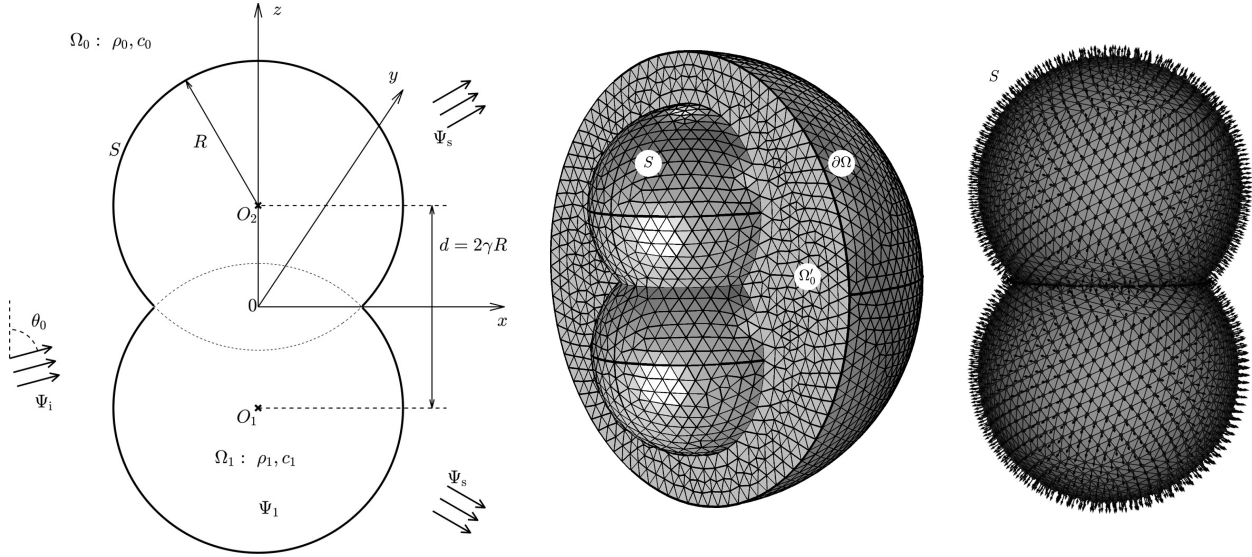


Рис. 7.1: Пример геометрии из объединения двух сфер. Слева математическая сцена, посередине ее аппроксимация для МКЭ, а справа — для МГЭ

## 7.2. Основные сведения о задаче

**Обозначения.** Пусть в неограниченной области идеальной жидкости  $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$  с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  находится препятствие (или включение) — область  $\Omega_1$  другой идеальной жидкости с параметрами  $\rho_1$  и  $c_1$ .

Считается, что область  $\Omega_1$  имеет достаточно общую форму. Пусть  $S = \partial\Omega_1$  — граница  $\Omega_1$ ,  $n = n_x$  — внешняя нормаль к  $S$  в точке  $x \in S$ . Поверхность  $S$  предполагается кусочно-гладкой класса  $C^2$  в точках гладкости.

Пусть  $x \cdot y$  — скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ ,  $\hat{x} = x/|x|$ ,  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $\partial_{x,x'}^2 = \partial_x \partial_{x'}$ .

Предполагается, что в области  $\Omega_0$  распространяется плоская (падающая или первичная) гармоническая звуковая волна с потенциалом скорости  $\Psi_i$ . Волну  $\Psi_i$  будем характеризовать единичным направлением  $d$  и волновым числом  $k_0 = \omega/c_0$ , где  $\omega$  — круговая частота волны.

В результате рассеяния волны  $\Psi_i$  препятствием  $\Omega_1$  образуются два вторичных звуковых поля — рассеянная волна в  $\Omega_0$  и поле звуковых колебаний в  $\Omega_1$  (см. [190]). Потенциал скорости рассеянной волны будем обозначать  $\Psi_s$  и пусть  $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$  — суммарный потенциал в  $\Omega_0$ . Потенциал скорости звуковых колебаний в препятствии  $\Omega_1$  обозначим  $\Psi_1$ .

**Основная задача.** Найти потенциал рассеянной волны  $\Psi_s$ .

**Акустические уравнения.** Для решения данной проблемы представим потенциал скорости в падающей плоской звуковой волне в виде

$$\Psi_i = \exp[i(k_0 d \cdot x - \omega t)], \quad (7.1)$$

где  $t$  — время. Без ограничения общности амплитуда падающей волны полагается равной единице.

В связи с вынужденным характером колебательных процессов и тем, что рассматривается установившийся режим колебаний, все величины, изменяющиеся со временем, будут зависеть от  $t$  аналогично функции  $\Psi_i$ . Поэтому любую функцию  $\Phi(x, t)$  можно представить в виде  $\Phi(x)e^{-i\omega t}$ . В дальнейшем множитель  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

Потенциалы скоростей для рассеянного и возбужденного внутри объема  $\Omega_1$  полей звуковых колебаний удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [191]

$$\Delta\Psi_s + k_0^2\Psi_s = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (7.2)$$

$$\Delta\Psi_1 + k_1^2\Psi_1 = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad (7.3)$$

где  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  — оператор Лапласа,  $k_1 = \omega/c_1$  — волновое число для  $\Omega_1$ .

Акустическое давление и скорость частиц акустической среды в  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  определяются соответственно выражениями

$$p_0 = i\rho_0\omega\Psi_0, \quad u_0 = \nabla\Psi_0, \quad (7.4)$$

$$p_1 = i\rho_1\omega\Psi_1, \quad u_1 = \nabla\Psi_1. \quad (7.5)$$

На поверхности  $S$  должны выполняться условия равенства нормальных скоростей и акустических давлений в средах  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ :

$$u_{1n} = u_{0n}, \quad p_1 = p_0, \quad x \in S. \quad (7.6)$$

где величины слева записаны для  $\Omega_1$ , а справа — для  $\Omega_0$ ,  $u_{jn} = u_j \cdot n$ ,  $j = 0, 1$ .

Кроме того, потенциал скорости рассеянной волны должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [190]

$$\Psi_s = O(|x|^{-1}), \quad \partial_{|x|}\Psi_s - ik_0\Psi_s = O(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (7.7)$$

а потенциал скорости в препятствии должен быть ограничен:

$$\Psi_1 = O(1), \quad x \in \Omega_1. \quad (7.8)$$

Таким образом, для нахождения  $\Psi_s$  нужно решить уравнения (7.2), (7.3) с учетом (7.1), (7.4), (7.5) и условий (7.6), (7.7), (7.8).

**Случай шара.** При тестировании методов применяется известное аналитическое решение задачи рассеяния для сферической формы  $\Omega_1$  радиуса  $R$  с центром в начале координат. Данное решение можно найти в работе [192]. Приведем его.

Решаем уравнение (7.2) методом разделения переменных в сферической системе координат  $x = r(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$ ,  $\hat{x} = \hat{x}(\varphi, \theta)$  с учетом условий излучения на бесконечности (7.7). Тогда потенциал скорости рассеянной волны представляется в виде сферического разложения

$$\Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} h_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (7.9)$$

где  $h_l$  — сферические функции Ханкеля первого рода,  $Y_{lm}(\varphi, \theta) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$  — ненормированные сферические гармоники,  $P_l^m$  — присоединенные функции Лежандра,

$P_l^0 = P_l$  — многочлены Лежандра,  $A_{lm}$  — неизвестные коэффициенты потенциала  $\Psi_s$ . Соответственно, в силу (7.8) решение уравнения (7.3) имеет вид

$$\Psi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (7.10)$$

где  $j_l$  — сферические функции Бесселя.

Разложим по сферическим гармоникам также падающую волну (7.1). Пусть направляющий вектор  $d$  имеет сферические координаты  $(\varphi, \theta) = (0, \theta_0)$ . Тогда согласно [190]

$$\Psi_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \gamma_{lm} j_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad \gamma_{lm} = \frac{i^l (2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta_0). \quad (7.11)$$

Далее штрих для функций обозначает дифференцирование по аргументу. Для выражений, входящих в граничные условия (7.6), имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} u_{0r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_0 (\gamma_{lm} j_l'(k_0 r) + A_{lm} h_l'(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_0 &= i \rho_0 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\gamma_{lm} j_l(k_0 r) + A_{lm} h_l(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ u_{1r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_1 B_{lm} j_l'(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_1 &= i \rho_1 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Подставляя данные разложения в равенства (7.6), учитывая, что  $|x| = R$  на  $S$ , из ортогональности сферических гармоник получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} k_1 B_{lm} j_l'(k_1 R) &= k_0 (\gamma_{lm} j_l'(k_0 R) + A_{lm} h_l'(k_0 R)), \\ \rho_1 B_{lm} j_l(k_1 R) &= \rho_0 (\gamma_{lm} j_l(k_0 R) + A_{lm} h_l(k_0 R)). \end{aligned}$$

Решая эту систему приходим к следующему утверждению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1** ([192]). *Для случая жидкого шара  $\Omega_1$  радиуса  $R$  с центром в нуле имеем следующие коэффициенты в рядах (7.9), (7.10):*

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{k_0 \rho_1 j_l'(k_0 R) j_l(k_1 R) - k_1 \rho_0 j_l(k_0 R) j_l'(k_1 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j_l'(k_1 R) - k_0 \rho_1 h_l'(k_0 R) j_l(k_1 R)}, \\ B_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{h_l(k_0 R) j_l'(k_0 R) - h_l'(k_0 R) j_l(k_0 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j_l'(k_1 R) - k_0 \rho_1 h_l'(k_0 R) j_l(k_1 R)}. \end{aligned}$$

### 7.3. Комбинированный метод конечных элементов

Сформулированную в разделе 7.2 задачу рассеяния звука можно решить численно-аналитическим методом с использованием метода конечных элементов [195] на основе подхода, предложенного в работах [193, 194].

В соответствии с этим подходом в жидкости, прилегающей к препятствию  $\Omega_1$ , выделяется сферическая поверхность  $S_0$  радиуса  $R_0$  такого, чтобы внутри этой поверхности оказалось  $\Omega_1$  и некоторая область содержащей среды  $\Omega'_0$ , такая что  $S_0 = \partial\Omega'_0$  (см. рис. 7.1 посередине). При этом минимальное расстояние от  $S$  до  $S_0$  должно иметь порядок характерного размера  $\Omega_1$ . Тогда область  $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1$  можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны  $\Psi_i$ .

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого к уравнениям (7.2), (7.3) надо добавить уравнение, описывающее колебания жидкости в  $\Omega'_0$ . Введем новую неизвестную переменную  $\Psi$  — потенциал скорости в  $\Omega'_0$ . Поскольку в  $\Omega'_0$  находится та же жидкость, что и во всей области  $\Omega_0$ , то потенциал  $\Psi$  должен удовлетворять волновому уравнению вида (7.2):

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0, \quad x \in \Omega'_0. \quad (7.12)$$

При этом акустическое давление и скорость частиц акустической среды в  $\Omega'_0$  будут определяться соотношениями

$$p = i\rho_0\omega\Psi, \quad u = \nabla\Psi.$$

Немного изменится вид граничных условий (7.6) на поверхности  $S$ . В них надо заменить  $u_{0n}$  и  $p_0$  на  $n \cdot \nabla\Psi$  и  $i\rho_0\omega\Psi$  соответственно.

Далее будем использовать сферическую систему координат с началом в центре  $\Omega$ . На сферической внешней поверхности  $S_0$  области  $\Omega$  надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в  $\Omega'_0$  и во внешней среде  $\Omega_0$ :

$$\partial_r\Psi = \partial_r\Psi_0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad r = R_0. \quad (7.13)$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных скоростей в частицах, расположенных по обе стороны  $S_0$ , а второе — требование равенства давлений.

Разобьем все подобласти шара  $\Omega$  на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 7.1 посередине, где для наглядности показана только половина слоя  $\Omega'_0$ .

Неизвестные функции в  $\Omega$  представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов. Тогда для потенциалов  $\Psi$ ,  $\Psi_1$  можно записать

$$\Psi(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(x), \quad x \in \Omega'_0, \quad (7.14)$$

$$\Psi_1(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_{1k} f_k(x), \quad x \in \Omega_1,$$

где  $\psi_k$  — узловые значения потенциала  $\Psi$  в области  $\Omega'_0$ ,  $\psi_{1k}$  — узловые значения потенциала  $\Psi_1$  в области  $\Omega_1$ ,  $f_k$  — координатные функции конечно-элементной модели,  $K$  —



общее количество узлов. Для удобства считаем, что индексы  $k = 1, 2, \dots, K$  соответствуют узлам всей сетки конечных элементов области  $\Omega$ , причем индексы  $1, 2, \dots, K_0$  при  $K_0 < K$  нумеруют узлы, отвечающие поверхности  $S_0$ . Полагаем  $\psi_k \equiv 0$  и  $\psi_{1k} \equiv 0$  для не относящихся к  $\Omega'_0$  и  $\Omega_1$  узлов соответственно.

Вне области  $\Omega'_0$  потенциал скорости  $\Psi_s$  рассеянной волны будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам (7.9). Для потенциала скорости  $\Psi_i$  возьмем разложение (7.11).

Подставляя (7.9), (7.11), (7.14) во второе граничное условие (7.13) и используя ортогональность сферических гармоник, находим выражения коэффициентов  $A_{lm}$  через узловые значения  $\psi_k$  на поверхности  $r = R_0$ :

$$A_{lm} = -\gamma_{lm} \frac{j_l(k_0 r)}{h_l(k_0 r)} + \frac{1}{h_l(k_0 r) N_{lm}} \sum_{j=1}^{K_0} \psi_j \langle f_j, Y_{lm} \rangle, \quad (7.15)$$

где

$$\langle f_j, Y_{lm} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j(r, \theta, \varphi) \overline{Y_{lm}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\varphi d\theta, \quad N_{lm} = \langle Y_{lm}, Y_{lm} \rangle = \frac{4\pi(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}.$$

Теперь подставим выражение (7.15) для  $A_{lm}$  в первое граничное условие (7.13). В результате граничные условия (7.6) и первое из (7.13) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций  $\Psi$  и  $\Psi_1$  из ограниченной области  $\Omega$ .

Далее решаем краевую задачу для уравнений (7.3), (7.12) с указанными граничными условиями при помощи стандартной технологии МКЭ [195] для конечной области  $\Omega$ . В результате решения находим узловые значения неизвестных функций  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Подставляя функции  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, K_0$ , в (7.15), вычисляем коэффициенты  $A_{lm}$  потенциала скорости в рассеянном поле (7.9), что решает основную задачу.

## 7.4. Метод граничных элементов

**Основные уравнения.** Методу граничных элементов, в том числе в контексте акустических проблем, посвящено большое число работ, см., например, [196, 197, 198, 199, 200]. Воспользуемся данными источниками, цитируя только отдельные места.

Из результатов раздела 7.2 следует, что потенциал  $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$  удовлетворяет внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца, а потенциал  $\Psi_1$  — внутренней краевой задаче. Поэтому для  $x \in \Omega_0$  имеем интегральные уравнения

$$C(x)\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'}\Psi_0(x')] dx' + \Psi_i(x), \quad (7.16)$$

$$(C(x) - 1)\Psi_1(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x)\Psi_1(x') - G_{k_1}(x', x)\partial_{n'}\Psi_1(x')] dx', \quad (7.17)$$

где  $dx' = dS(x')$ ,  $n' = n_{x'}$ ,  $G_k(x, y) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$ ,  $r = |x - y|$ , — функция Грина для уравнения Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$ , удовлетворяющая условию Зоммерфельда для уходящих волн (7.7), функция  $C(x) = 0$  внутри  $\Omega_1$ ,  $C(x) = 1$  снаружи  $\Omega_1$  и  $C(x)$  на поверхности

$x \in S$  — положительный кусочно-постоянный геометрический коэффициент, зависящий от скачка нормали, в частности,  $C(x) = 1/2$  в точках гладкости  $S$ .

При  $x \in S$  уравнения (7.16), (7.17) переходят в граничные интегральные уравнения метода граничных элементов. Для нахождения неизвестных граничных значений потенциалов в них присоединяем граничные условия (7.6)

$$\partial_n \Psi_0(x) = \partial_n \Psi_1(x), \quad \rho_0 \Psi_0(x) = \rho_1 \Psi_1(x), \quad x \in S. \quad (7.18)$$

Как показано в работе [196], решение граничного уравнения (7.16) неединственно для волновых чисел  $k_0$ , для которых  $-k_0^2$  — собственное значение оператора Лапласа  $\Delta$  во внутренней задаче. Чтобы избежать этого, воспользуемся идеей Бертона и Миллера [196] и запишем комбинированное уравнение. Оно получается, если тождество (7.16) при  $x \in S$  продифференцировать по нормали  $n_x$ , умножить результат на комплексный параметр  $\alpha$  и прибавить его к исходному уравнению. Тогда с учетом кусочного постоянства  $C(x)$  находим

$$C(x) \partial_n \Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n',n}^2 G_{k_0}(x', x) \Psi_0(x') - \partial_n G_{k_0}(x', x) \partial_{n'} \Psi_0(x')] dx' + \partial_n \Psi_1(x)$$

и комбинированное уравнение Бертона–Миллера

$$C(x) T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)) \Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x', x)) \partial_{n'} \Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_1(x)),$$

где оператор  $T_\alpha(f) = f + \alpha \partial_n f$  берется по  $x$ . Обычно полагают  $\alpha = i/k_0$ , что обосновано модельным случаем шара [201]. К уравнению (7.17) метод Бертона–Миллера мы не применяем.

При вычислении поверхностных интегралов с функцией Грина и ее производными нужно учитывать их сингулярность. При  $r \rightarrow 0$  имеем  $G_k = O(r^{-1})$  и в точках гладкости поверхности  $\partial_{n'} G_k = O(r^{-1})$ ,  $\partial_n G_k = O(r^{-1})$ ,  $\partial_{n,n'}^2 G_k = O(r^{-2})$ . Поэтому в первых трех случаях интеграл будет слабо сингулярным, а в четвертом — гиперсингулярным. Слабо сингулярный интеграл сходится в смысле Коши, а для гиперсингулярного интеграла нужно применить регуляризацию. Заметим, что регуляризация, если она доступна, также полезна в слабо сингулярном случае для увеличения точности численного интегрирования. Для интегралов с производными функции Грина в уравнениях выше регуляризация делается на основе следующих тождеств для статической функции Грина [202]:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G_0(x', x) dx' &= -C(x), \quad \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x) dx' = 0, \\ \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x) (x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x', x) n' dx' - C(x) n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_S \partial_{n'} G_k(x', x) \Psi(x') dx' = \int_S [\partial_{n'} G_k(x', x) \Psi(x') - \partial_n G_0(x', x) \Psi(x)] dx' - C(x) \Psi(x), \quad (7.19)$$

$$\int_S \partial_{n,n'}^2 G_k(x', x) \Psi(x') dx' = \int_S [\partial_{n,n'}^2 G_k(x', x) \Psi(x') - \partial_{n,n'}^2 G_0(x', x) L_\Psi(x', x)] dx' + \int_S \partial_n G_0(x', x) \nabla_S \Psi(x) \cdot n' dx', \quad (7.20)$$

$$L_\Psi(x', x) = \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x) \cdot (x' - x)_n,$$

где  $(x)_n = x - (x \cdot n)n$  — проекция вектора на касательную плоскость,  $\nabla_S \Psi = (\nabla \Psi)_n$  — поверхностный градиент. Теперь интегралы справа в (7.19), (7.20) не более чем слабо сингулярные. Для функции Грина  $G_k$  в общем случае формул, аналогичных (7.19) и (7.20), нет, поэтому вычисление интегралов с ней представляет определенную проблему (см., например, [203]).

Сведем задачу к системе из двух граничных интегральных уравнений, положив на основе граничных условий (7.18)

$$\Psi_1 = \rho_{01} \Psi_0, \quad \partial_n \Psi_1 = \partial_n \Psi_0, \quad \rho_{01} = \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

В итоге получаем следующее утверждение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Для неизвестных граничных значений  $\Psi_0$ ,  $\partial_n \Psi_0$  при  $x \in S$

$$C(x) T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)) \Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x', x)) \partial_{n'} \Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_1(x)), \quad (7.21)$$

$$(C(x) - 1) \rho_{01} \Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x) \rho_{01} \Psi_0(x') - G_{k_1}(x', x) \partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad (7.22)$$

где для сингулярных интегралов с производными функции Грина применяется регуляризация на основе тождеств (7.19), (7.20).

По поводу доказательства гладкости (как минимум  $C^{1,\beta}$ ) и единственности решения задачи (7.21), (7.22) см. [204].

Потенциал рассеянной волны во внешности  $\Omega_1$  вычисляется на основе (7.16):

$$\Psi_s(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x) \Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x) \partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad x \in \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup S). \quad (7.23)$$

Здесь в дальней зоне интегралы регулярные.

**Решение задачи (7.21), (7.22) для шара.** Найдем аналитическое решение задачи рассеяния на основе предложения 2 для шара, чтобы сравнить его с решением из предложения 1 и использовать в тестировании МГЭ.

Пусть для удобства  $\Omega_1$  — единичный шар с центром в нуле. Тогда  $S$  — единичная сфера с центром в нуле и  $C(x) = 1/2$  на ней. Напомним, что  $d$  — направляющий вектор,  $|d| = 1$ . Далее положим  $r = |x|$ . Запишем сферическое разложение падающего потенциала  $\Psi_i$  в эквивалентном (7.11) виде

$$\Psi_i(x) = e^{ik_0 d \cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(k_0 r) P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \gamma_l = (2l + 1) i^l.$$

Тогда решение задачи (7.21), (7.22) ищем в виде разложений

$$\Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} U_l P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \partial_n \Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l(d \cdot \hat{x}),$$

где

$$U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0), \quad \Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(k_0) P_l(d \cdot \hat{x}).$$

Наша цель — найти коэффициенты  $A_l$  потенциала  $\Psi_s$ .

Воспользуемся следующим сферическим разложением Джексона для функции Грина [205]:

$$G_k(x', x) = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j_l(kr_<) h_l(kr_>) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x}),$$

где  $r_< = \min(r, r')$ ,  $r_> = \max(r, r')$ ,  $r' = |x'|$ .

Производные по нормали функции Грина на сфере берем в смысле главного значения (как среднее при  $r \rightarrow 1$  изнутри  $r < r' < 1$  и снаружи  $1 < r' < r$ ). Тогда

$$\partial_{n'} G_k(x', x) = \partial_n G_k(x', x) = \frac{ik^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} [j_l(k) h_l'(k) + j_l'(k) h_l(k)] P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

$$\partial_{n, n'}^2 G_k(x', x) = ik^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j_l'(k) h_l'(k) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

Здесь и далее ряды считаем формальными, чтобы не испытывать проблем со сходимостью. При выводе аналитического решения можно не использовать регуляризацию, так как она основана на добавлении и вычитании одинаковых, но по-разному вычисляемых слагаемых.

Учтем соотношение ортогональности для многочленов Лежандра

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{|x'|=1} P_l(d \cdot x') P_l(x \cdot x') dx' = P_l(d \cdot x) \delta_{ll}, \quad |x| = 1.$$

Тогда, опуская несложные выкладки, для (7.21), (7.22) получаем следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов  $U_l$ ,  $V_l$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U_l + \alpha V_l) &= \left( \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0) h_l'(k_0) + j_l'(k_0) h_l(k_0)] + \alpha i k_0^3 j_l'(k_0) h_l'(k_0) \right) U_l \\ &- \left( i k_0 j_l(k_0) h_l(k_0) + \alpha \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0) h_l'(k_0) + j_l'(k_0) h_l(k_0)] \right) V_l + \gamma_l (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\ -\frac{1}{2} \rho_{01} U_l &= \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1) h_l'(k_1) + j_l'(k_1) h_l(k_1)] \rho_{01} U_l - ik_1 j_l(k_1) h_l(k_1) V_l. \end{aligned}$$

Соберем слагаемые при одинаковых коэффициентах и упростим, воспользовавшись вронскианом для функций Бесселя

$$j_l(k) h_l'(k) - j_l'(k) h_l(k) = \frac{i}{k^2}. \quad (7.24)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} - \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] - \alpha ik_0^3 j_l'(k_0)h_l'(k_0) \\
& \quad = -ik_0^2 j_l(k_0)h_l'(k_0) - \alpha ik_0^3 j_l'(k_0)h_l'(k_0) = -ik_0^2 h_l'(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\
& \alpha \left( \frac{1}{2} + \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] \right) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) \\
& \quad = \alpha ik_0^2 j_l'(k_0)h_l(k_0) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) = ik_0 h_l(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\
& \frac{1}{2} + \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1)h_l'(k_1) + j_l'(k_1)h_l(k_1)] = ik_1^2 j_l'(k_1)h_l(k_1).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0))[-ik_0^2 h_l'(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l] = (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0))\gamma_l, \\
& ik_1 h_l(k_1)[-k_1 j_l'(k_1)\rho_{01}U_l + j_l(k_1)V_l] = 0.
\end{aligned}$$

Суть метода Бертона–Миллера для уравнения (7.16) в данном случае состоит в том, что при  $\text{Im } \alpha \neq 0$  множитель  $j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0) \neq 0$ . Причем выбор  $\alpha = i/k_0$  можно считать оптимальным [201]. Если взять  $\alpha = 0$ , что отвечает граничному уравнению в стандартной постановке, то при  $j_l(k_0) = 0$  (тогда  $-k_0^2$  собственное значение  $\Delta$ ) получим неоднозначность. Кроме того,  $h_l(k_1) \neq 0$ , что иллюстрирует, почему метод Бертона–Миллера не применялся к уравнению (7.17). В итоге после сокращений получаем

$$\begin{aligned}
& -ik_0^2 h_l'(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l = \gamma_l, \\
& -k_1 j_l'(k_1)\rho_0 U_l + j_l(k_1)\rho_1 V_l = 0.
\end{aligned}$$

Подставим сюда  $U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0)$ . После несложных вычислений с учетом вронскиана (7.24) находим

$$\begin{aligned}
& -k_0 h_l'(k_0)h_l(k_0)A_l + h_l(k_0)V_l = \gamma_l k_0 j_l'(k_0)h_l(k_0), \\
& -k_1 j_l'(k_1)h_l(k_0)\rho_0 A_l + j_l(k_1)\rho_1 V_l = \gamma_l k_1 j_l'(k_1)j_l(k_0)\rho_0
\end{aligned}$$

и коэффициенты

$$A_l = -\gamma_l \frac{k_0 j_l'(k_0)j_l(k_1)\rho_1 - k_1 j_l'(k_1)j_l(k_0)\rho_0}{k_0 h_l'(k_0)j_l(k_1)\rho_1 - k_1 j_l'(k_1)h_l(k_0)\rho_0},$$

что согласуется с предложением 1 для  $R = 1$  и направления  $d(0, \theta_0)$ , если учесть формулу сложения для сферических гармоник.

**Численный метод решения задачи** (7.21), (7.22). Мы отталкиваемся от случая, когда поверхность  $S$  аппроксимирована равномерным треугольным мешем — полигональной сеткой, состоящей из вершин  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$  с нормальными  $\{n_i\}_{i=1}^N$  и треугольных граней приблизительно одинакового малого размера (см. рис. 7.1 справа). Функции на меше интерполируются кусочно-линейными функциями с точками интерполяции в вершинах меша. Для приближенного вычисления интегралов по поверхности применяется следующая (масс-)формула:

$$\int_S f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \tag{7.25}$$

где  $w_i$  — площади ячеек Вороного  $S_i$  (граничных элементов) с центрами в вершинах  $x_i$ , на которые разбивается меш [206]. Так как интеграл от функции по треугольнику равен среднему от значений функции в вершинах треугольника, то для равномерного меша формула (7.25) имеет первый порядок точности.

В данной ситуации для решения задачи (7.21), (7.22) удобно использовать метод коллокаций [199]. Напомним, что

$$\begin{aligned}\Psi_i(x) &= e^{ik_0 d \cdot x}, \quad G_k(x', x) = (4\pi)^{-1} e^{k' r t}, \\ k' &= ik, \quad y = x' - x, \quad r = |y|, \quad t = r^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\partial_n \Psi_i &= ik_0 e^{ik_0 d \cdot x} d \cdot n, \quad \partial_{n'} r = ty \cdot n', \quad \partial_n r = -ty \cdot n, \\ \partial_{n'} G_k &= G_k(k' - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G_k = G_k(k' - t) \partial_n r, \\ \partial_{n, n'}^2 G_k &= k'^2 G_k \partial_{n'} r \partial_n r - G_k(k' - t)t(n' \cdot n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r).\end{aligned}$$

Здесь полагаем  $t = 0$  для  $r = 0$ , так как слабо сингулярные интегралы с функцией Грина в окрестности особой точки стремятся к нулю при стягивании окрестности в точку. Однако для увеличения точности необходимо учесть приближенную формулу

$$I_i = \int_{S_i} G_k(x', x_i) dx_i \approx \sqrt{\frac{w_i}{4\pi}}$$

вместо  $I_i = 0$ . Эта формула выводится с учетом малости  $S_i$  путем сравнения  $I_i$  с интегралом по кругу площади  $w_i$  с центром в вершине  $x_i$  и лежащего в плоскости с нормалью  $n_i$ .

Сопоставим  $(x, n, x', n')$  с  $(x_i, n_i, x_j, n_j)$  и положим  $f^{(i)} = f(x_i)$ ,  $f^{(i,j)} = f(x_i, x_j)$ . Тогда дискретная версия задачи (7.21), (7.22) с учетом регуляризации (7.19), (7.20) и формулы интегрирования (7.25) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}2C^{(i)}\Psi_0^{(i)} + C^{(i)}\alpha\partial_{n_i}\Psi_0^{(i)} &= \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j,i)} \Psi_0^{(i)} - T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)}) \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}] + T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) \\ &+ \alpha \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_i, n_j}^2 G_{k_0}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_i, n_j}^2 G_0^{(j,i)} L_{\Psi_0}^{(j,i)} + \partial_{n_i} G_0^{(j,i)} \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot n_j], \quad (7.26)\end{aligned}$$

$$(2C^{(i)} - 1)\rho_{01}\Psi_0^{(i)} = \sum_{j=1}^N w_j [\rho_{01}(\partial_{n_j} G_{k_1}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j,i)} \Psi_0^{(i)}) - G_{k_1}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}], \quad (7.27)$$

где

$$\begin{aligned}T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)}) &= G_{k_0}^{(j,i)} + \alpha \partial_{n_i} G_{k_0}^{(j,i)}, \quad T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) = \Psi_i^{(i)} + \alpha \partial_{n_i} \Psi_i^{(i)}, \\ L_{\Psi_0}^{(j,i)} &= \Psi_0^{(i)} + \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot (x_j - x_i)_{n_i}.\end{aligned}$$

Для оценки поверхностного градиента используется тот факт, что приближенно  $L_{\Psi_0}^{(i',i)} \approx \Psi_0^{(i')}$ , если вершина  $x_{i'}$  близка к  $x_i$ . Отсюда получаем линейную систему

$$(x_{i'} - x_i)_{n_i} \cdot \nabla_S \Psi_0^{(i)} = \Psi_0^{(i')} - \Psi_0^{(i)}, \quad i' \in R_i.$$

где  $R_i$  — множество индексов соседних с  $x_i$  вершин. Система записывается в виде  $Ug = f$ , где  $g = \nabla_S \Psi_0^{(i)}$  — неизвестный вектор. Она переопределенная, поэтому  $g = U^+ f$ , где  $U^+$  — псевдообратная матрица. Эта матрица быстро рассчитывается в каждой вершине, так как у вершин равномерного меша обычно около 6 соседей.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** *Неизвестные значения  $\Psi_0^{(i)}$ ,  $\partial_{n_i} \Psi_0^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , находятся из системы линейных уравнений размера  $2N$ , получаемой из уравнений (7.26), (7.27).*

Обоснование сходимости метода коллокаций можно провести по аналогии с [207]. Ключевую роль здесь играет единственность и липшицева  $C^{1,\beta}$ -гладкость решения, а также оценки интегралов со слабо сингулярным ядром. Данные оценки схожи с оценками из книги [208], которые применялись для доказательства компактности интегральных операторов простого и двойного слоя.

Для приближенного вычисления потенциала рассеянной волны и, как следствие, решения основной задачи используем дискретный вариант (7.23)

$$\Psi_s(x) \approx \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - G_{k_0}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}],$$

где  $x$  лежит снаружи меша на отдалении.

Отметим, что для увеличения точности интегрирования и одновременного уменьшения размера системы линейных уравнений мы используем подробный меш, мелкие ячейки которого объединяются в более крупные области Вороного, которые выступают в роли граничных элементов. В качестве центров элементов, в которых вычисляются потенциалы, используются вершины упрощенного меша. Этот меш получается либо равномерным сэмплированием на основе диска Пуассона, либо адаптивным методом схлопывания ребер по квадрикам. Сами элементы строятся алгоритмом построения областей Вороного на графе по реберному геодезическому расстоянию.

## 7.5. Результаты и сравнение

С использованием подходов, изложенных в разделах 7.3 и 7.4, было проведено решение задачи, геометрия которой представлена на рис. 7.1.

Для проверки алгоритмов решения задачи рассеяния был проведен ряд численных экспериментов для составного тела  $\Omega_1$  в виде объединения двух шаров ( $R = 1$ ,  $\gamma = 0.7$ ) со следующими значениями материальных параметров сред:  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 1485$  м/с. Частота падающей волны задавалась волновым размером  $k_0 a = 5$ , где  $a$  — радиус шара  $B_a$ , объем которого равен объему тела  $\Omega_1$ . Результаты МКЭ и МГЭ оказались практически идентичными.

На рис. 7.2 приведены диаграммы рассеяния в дальней зоне по амплитуде. Графики МКЭ и МГЭ сливаются, поэтому оставлен только график МКЭ. Сплошная линия отвечает препятствию  $\Omega_1$ , пунктирная линия — шару  $B_a$ .

Для МКЭ использовалось 248942 узлов сетки, размер матрицы  $248942 \times 248942$ , ее плотность 0.00387 (особенность МКЭ), время счета около 700 с. Для МГЭ использовалось 1000 граничных элементов (получаемых из 20000 вершин меша), размерность матрицы  $2000 \times 2000$ , ее плотность 1.0 (особенность метода коллокаций для МГЭ), время счета около 10 с.

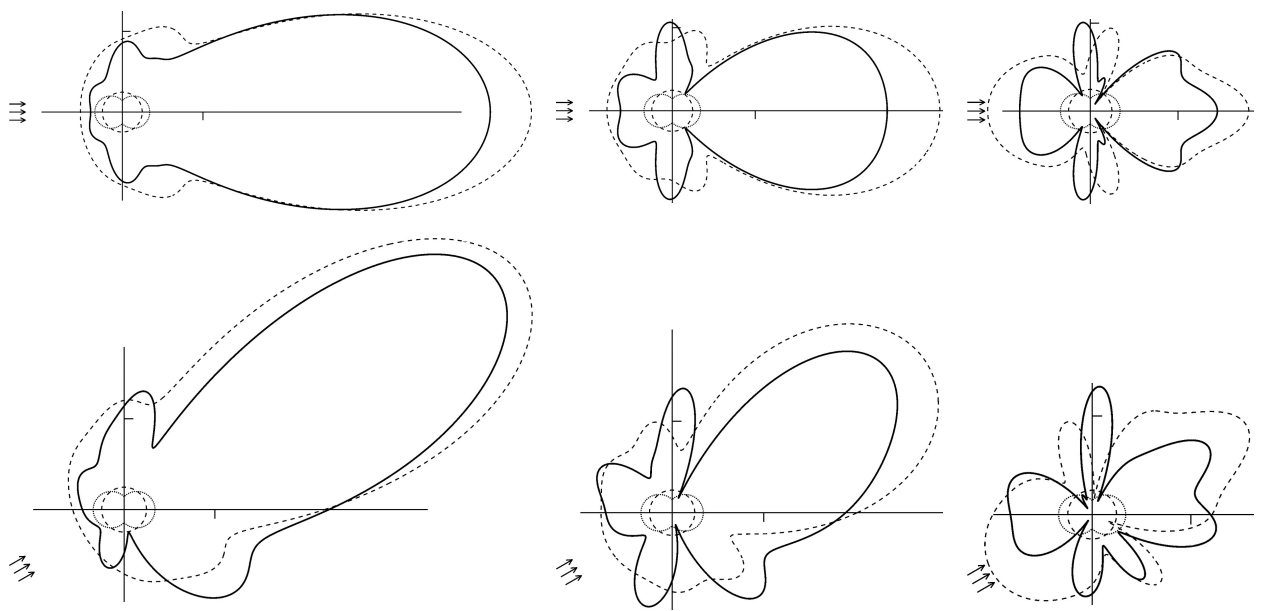


Рис. 7.2: Верхний ряд построен для  $\theta_0 = 0^\circ$  и параметров  $(\rho_1/\rho_0, c_1/c_0) = (1, 4), (3, 3), (4, 1)$  соответственно, нижний ряд отвечает  $\theta_0 = 30^\circ$  и тем же параметрам



# Заключение

Из выше изложенных глав можно сделать как фундаментальные выводы, так и выводы о дальнейшем прикладном применении полученных результатов.

Из доказанных в главе 1 теорем возникает вопрос о справедливости их на пространстве всех диагональных решёток. Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной работе предложен алгоритм построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

С вопросами построения параллелепипедальных сеток связаны вопросы нахождения оптимальных алгоритмов построения абсолютно минимальной полной гиперболической системы вычетов и гиперболических параметров решётки. Эти задачи решаются в сотрудничестве с кафедрой математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством Чубарикова В. Н.

Оценка, полученная в главе 2, точнее чем общая оценка работы [16], обобщающей результаты В. А. Быковского [15]. Что позволяет более точно изучить вопрос приближения алгебраических решёток, решётками линейного сравнения, изучая асимптотику соответствующих гиперболических дзета-функций.

В работе [41] дается достаточно подробный обзор работ [12] — [40], связанных с данной тематикой.

Также из результатов главы 2 видно, что если последовательность вложенных решёток решений линейных сравнений обладает тем свойством, что последовательность третьих гиперболических параметров стремится к бесконечности, то мы получаем мультипликативный, концентрический алгоритм приближенного интерполирования с правилом остановки, который даёт последовательность интерполяционных многочленов, сходящихся к интерполируемой функции.

Было бы интересно найти аналоги оценок Быковского (см. [45], [16]) для задачи интерполирования.

Результаты этой главы показывают качество теоретико-числовой интерполяции по полным системам вычетов, которая существенно отличается от других способов интерполяции функции многих переменных, в том числе возможностью сведения задачи многомерной интерполяции к одномерной.

Результаты главы 3 просты и лаконичны и носят, как фундаментальный характер, так и прикладной. Реализована библиотека численного интегрирования по теоретико-числовым сеткам. Используемые алгоритмы эффективнее классических при исследовании распространения плоских волн в пространстве. Впервые в мире задача многомерной интерполяции сведена к одномерной, что интересно как с фундаментальной точки зрения, так и с практической, так как позволяет строить интерполяционный многочлен

от  $N$  гармоник за  $O(N \ln(N))$  операций в многомерном случае.

В главе 4 изложены такие свойства обобщенного преобразования Ганкеля, как инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, дифференциально-разностный оператор, для которого ядро является собственной функцией, операторы обобщенного сдвига, свертки, обобщенные средние и их сходимость в пространствах  $L^p$  и почти всюду. Все это говорит о начале построения гармонического анализа в пространствах  $L^p$  на прямой со степенным весом, зависящим от двух параметров  $(k, a)$ , для которых  $a = 1/r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1/2 - 1/(4r)$ . В дальнейшем в этих пространствах нужно будет исследовать аппроксимативные свойства обобщенных средних, модельные интегральные операторы такие, как потенциал Рисса и преобразование Рисса.

Так же в главе изложены свойства одномерного  $(k, a)$ -обобщенного преобразования Фурье.

Эти результаты крайне важны при применении теории приближений и гармонического анализа в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

В 5 главе получены формулы для дискретного преобразования Фурье на многомерной параллелепипедальной сетке Н.М. Коробова имеющие важнейшее прикладное значение в области обработки информации и разложение периодических функций по системам гармоник реализованные в библиотеках описанных в главе 3.

В главе 6 решаются новые задачи по распространению плоских акустических волн с применением теоретико-числовых сеток.

Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией поверхностей полупространства и жидкого слоя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Поэтому для получения аналитического решения задачи отражения сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине плоским слоем жидкости применен метод, использующий решение аналогичной задачи в случае падения плоской волны. Такой подход к решению поставленной задачи позволил избежать необходимости непосредственного решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями. Найденное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

Сравнение двух подходов приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении, не превышающей  $10^{-6}$  по абсолютной величине, при использовании второго метода можно получить сокращение времени всех расчетов, за счет вычислений интегралов, от 10% до 12% для двойных и от 14% до 17% для тройных интегралов.

Установлено, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Гельмгольца-Кирхгофа.

Полученные фундаментальные и прикладные результаты говорят об обоснованности продолжения исследований по выделенным направлениям.

Так же они ставят необходимую прикладную задачу - реализация библиотеки численного интерполирования функций многих переменных по теоретико-числовым сеткам. А в рамках исследований в области акустики решение задачи об интерполяции функции описывающей распространение звуковых волн, значения которой измеряются датчиками в узлах параллелепipedальной сетки, по различным системам функций — тригонометрическим гармоникам и сферическим гармоникам. Здесь естественен вопрос о переносе полученных результатов на распространение электромагнитных волн. Особо была бы интересна реализация изучаемых методов интерполяции в "металле".

Так же в главе 6 получено приближенное аналитическое решение задачи об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука. Полученное решение можно распространить на случай сплюснутого сфероидального излучателя, если провести формальную замену  $\xi$  на  $i\xi$  и  $h$  на  $-ih$ , переводящую вытянутую сфероидальную систему в сплюснутую. В пределе, когда фокусное расстояние стремится к нулю ( $h \rightarrow 0$ ), обе сфероидальные координатные системы сводятся к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . Таким образом, найденное решение позволяет исследовать акустические поля излучателей, обтекаемых стационарным потоком идеальной жидкости, форма поверхности которых изменяется в широком диапазоне от иглы ( $\xi_0 = 1$  в вытянутой сфероидальной системе координат) до диска ( $\xi_0 = 0$  в сплюснутой сфероидальной системе координат).

Также точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией цилиндрического рассеивателя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Для построения аналитического решения давление в падающей сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Построенное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

Также получено строгое аналитическое решение задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

На основе полученного аналитического решения проведены численные расчеты, показывающие возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

В 6 главе получено аналитическое решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны, наклонно падающей на абсолютно жесткий цилиндр с неоднородным упругим покрытием, расположенный в движущейся идеальной жидкости. Исследовано рассеянное акустическое поле в дальней зоне. Проведенные численные расчеты выявили характерные черты влияния различных законов неоднородности материала покрытия и значений числа Маха на дифракционную картину.

С помощью покрытий в виде непрерывно неоднородного упругого слоя можно изменить звукоотражающие свойства цилиндрического тела. Такой слой легко реали-

зовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев. Получить требуемые характеристики рассеяния можно, если найти соответствующие зависимости для параметров неоднородного упругого слоя. Для этого следует решить обратную задачу об определении законов неоднородности покрытия, например, используя подход, предложенный в работе [15].

В 7 главе решена задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в форме жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, аппроксимируемой полигональной сеткой. Рассмотрены и сравнены два подхода к численно-аналитическому решению: метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Для МКЭ процесс расчета включает разбиение области, содержащей препятствие, на пространственные элементы с последующим вычислением сферического разложения потенциала. Для МГЭ задача сводится к системе интегральных уравнений, решаемой с учетом метода Бертона и Миллера, а также регуляризации сингулярных интегралов.

Проведенный анализ на примере тела в форме объединения двух одинаковых шаров показал, что метод граничных элементов обладает значительными преимуществами по вычислительным затратам при сохранении приемлемой точности расчета рассеянного звукового поля. При этом каждое из рассмотренных решений имеет свои особенности: преимуществом МКЭ является вариативность, позволяющая решать в области  $\Omega'_0$  широкий класс задач, включая пространственные эффекты. В свою очередь, МГЭ отличается высокой скоростью, но меньшей универсальностью, поскольку применим только для поверхностных эффектов.

Таким образом, выбор подхода определяется задачей: МГЭ предпочтителен для быстрого и точного расчета рассеянного поля, тогда как МКЭ позволяет решать более универсальные задачи в сложных областях.

Подводя **общий итог проделанной работы**, заметим что в ходе фундаментальных исследований были получены новые знания по многомерным теоретико-числовым решёткам, гиперболическим дзета-функциям решёток, преобразованиям Генкеля и обобщенным преобразованиям Фурье, а также решен ряд актуальных задач акустики. Это позволило сделать в коллаборации с МГУ имени М.В. Ломоносова, при сотрудничестве с профессором Чубариковым В.Н., открытие о дискретном преобразовании Фурье на параллелепипедальных сетках. Результаты фундаментальных исследований были реализованы при создании двух библиотек прикладных программ — многомерного численного интегрирования по параллелепипедальным сеткам Н.М. Коробова и многомерного интерполирования, реализующее многомерное дискретное преобразование Фурье. Программное обеспечение апробировано при решении задач акустики, дающее кратное повышение эффективности элементов численного решения интегральных уравнений, возникающих в задачах акустики.

### **Фундаментальная область применения результатов**

Исследования в области геометрии чисел поставили вопрос о построении упорядоченных подмножеств относительных минимумов решёток, играющее ключевую роль в построении наилучших параллелепипедальных сеток. Модельной задачей является решётка приближений Дирихле и решётка приближений линейными формами. Эти исследования запланированы как продолжение данного проекта в Тульской школе теории чисел. Эти исследования позволят получить быстрые алгоритмы редукции базисов решёток. Также это позволит сделать продвижение в решении задачи о приближении

алгебраических решётках целочисленными.

Описанные способы применения теоретико-числового метода в приближенном анализе при решении задач акустики могут и дальше применяться при численном решении задач дифракции звуковых волн, а также могут быть перенесены на задачи распространения электромагнитных волн. Для решения этих задач были разработаны библиотеки численного интегрирования и интерполирования.

Дискретное преобразование Фурье на параллелепипедальных сетках может быть применено при разложении функций комплексных (действительных) переменных для периодических функций, а с использованием периодизации сеток и для общего случая.

Фундаментальные знания полученные в области дифракции звуковых волн, являются основой для дальнейших исследований в этой области.

### **Прикладная область применения и рекомендации по внедрению**

Решение инженерной задачи о считывании параметров акустического или электромагнитного поля в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки, которое можно реализовать как считывание звуковых волн с поверхности с применение лазерных технологий или построении решёток антенн соответствующим параллелепипедальным сеткам на различных поверхностях или объемных тел. Позволит разлагать физические поля по гармоникам и решать задачи о распознавании объектов излучающих или отражающих волны.

Библиотеки численного интегрирования и интерполирования могут применяться в любых многомерных прикладных задачах, к примеру, расчету континуальных интегралов возникающих в физике больших энергий.

Фундаментальные знания в области акустики могут использоваться в прикладной акустике.

## **Список использованных источников**

1. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
4. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.
5. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)
6. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

7. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
8. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.
9. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0\_2.
10. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
11. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.
12. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
13. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.
14. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.
15. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
16. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
17. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.
18. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.
19. М. Н. Добровольский. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.
20. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.
21. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
22. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41–48.

23. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
24. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.
25. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.
26. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.
27. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
28. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.
29. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
30. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.
31. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.
32. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
33. Мельников О. В., Ремеслеников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с. — (Справ. мат. б-ка).
34. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом останковки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.
35. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом останковки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.
36. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом останковки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

37. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms for computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20–26, 2012. p. 22 – 24.
38. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 – 98.
39. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом останковки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 – 201.
40. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 22–29.
41. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.
42. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
43. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4–109.
44. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 136(178). 4(8). 1988. С. 451–467
45. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
46. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5. Вып. 1(9). С. 82–113.
47. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 2(4). С. 43 – 59.
48. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
49. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Научное образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО 2006. С. 189 – 198
50. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 – 143.



51. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
52. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.
53. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 178–187.
54. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
55. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
56. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
57. Локуцкий О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
58. Н. С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
59. Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Применение параллелепипедальных сеток Коробова в задачах акустики // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов Международной конференции "Алгебра и динамические системы посвященной 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова, Нальчик. — Нальчик: Издательство "Принт-центр 2022, с.45-47
60. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021. Том. 22, № 3. С. 368–38
61. Н. М. Коробов. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
62. Быстрое вычисление параметров параллелепипедальных сеток для интегрирования и интерполирования // ПОИВС. 2022. URL: <http://poivs.tsput.ru/ru/Count/TMK/HFunctionCalc2>. (Дата обращения 23.01.2024)
63. N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, Yu. A. Basalov, E. D. Rebrov , Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation Part of the Lecture Notes in Networks and Systems book series (LNNS,volume 702) // [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4\\_16](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4_16)
64. Родионов А.В., Добровольский М.Н., Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник, 2023, 24(3) С. 95-121.

65. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радиоисвязь, 1985.
66. Н. М. Добровольский, Н. Л. Клепикова, Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов, Препринты ИПФ АН СССР, 1990, №63, 29 с.
67. Н. М. Коробов, О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР, 1982, Т. 267, №2, с. 289–292.
68. Л. П. Бочарова, В. С. Ванькова, Н. М. Добровольский, О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки, 1991, Т. 49, №2, с. 23–28.
69. Rader C. Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Points is Prime // Proc. IEEE 56, 1968, pp. 1107-1108.
70. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.
71. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
72. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the  $(\kappa, a)$ -Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
73. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.
74. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive  $L_p$ -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.
75. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.
76. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с.
77. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2020. Vol. 52, no. 5. P. 4751-4782.
78. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
79. Mejjali H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 1–39.
80. Mejjali H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, no. 3. Article 186.
81. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
82. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

83. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.
84. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // Journal of Inequalities and Applications. 2022. Article number: 134. <https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1>.
85. Чертова Д. В. Теоремы Джексона в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  со степенным весом // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 100–116.
86. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
87. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. 196 с.
88. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.
89. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
90. Ben Saïd S., Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, iss. 4. P. 1265–1336.
91. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the  $(\kappa, a)$ -Generalized Fourier transform // Forum of Math., Sigma. 2023. Vol. 11, e72. <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
92. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group  $O(p; q)$  // Memoirs of the American Mathematical Societies. 2011. Vol. 213, iss. 1000. 132 p.
93. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // Int. Math. Res. Notices. 2016. Vol. 2016, iss. 23. P. 7179–7200.
94. Boubatra M. A., Negzaoui S, Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, iss. 3. P. 247–263.
95. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // Int. J. Reprod. Kernels. 2022. Vol. 1, iss. 1. P. 1–39.
96. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // Mediterr. J. Math. 2023. Vol. 20, iss. 3. Article 186.
97. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive  $L_p$ -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, iss. 3. P. 555–605.
98. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с. %%% Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, 804 p. % ISBN 0521483913, 9780521483919.
99. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с. %%% Bateman H., Erdrelyi A. *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, New York, McGraw Hill Book Company, 1953, 414 p. % ISBN 0486446158, 9780486446158.

100. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196. %%% Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. % doi: 10.1070/IM2007v071n05ABEH002379 .
101. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Том 1. М.: Наука, 1975. 656 с. %%% Hevitt E., Ross K.A. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I.* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag, 2012, 525 p. % ISBN 1441986383, 9781441986382.
102. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // *J. d'Analyse. Math.* 2005. Vol. 97. P. 25–55.
103. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. М.: Наука, 1970. 328 с. %%% Bateman H., Erdrelyi A. *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, New York, McGraw Hill Book Company, 1954, 451 p. %ISBN 0070195501, 9780070195509.
104. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
105. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
106. Ingard U. On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane // *J. Acoust. Soc. Am.* 1951. Vol. 23. No. 3. P. 329 – 335.
107. Magnuson A. H. Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. Vol. 57. No. 5. P. 1017 – 1024.
108. Lamb Jr. The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate // *Ann. Phys.* 1957. Vol. 1. No. 3. P. 233 – 246.
109. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
110. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
111. Piquette J. C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 84. No. 4. P. 1526 – 1535.
112. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15. Вып 4. С. 560 – 566.
113. Шендеров Е. Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой // *Акуст. журн.* 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 800 – 807.
114. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // *Информатика.* 2014. Вып. 2. С. 36 – 48.
115. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш.. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // *Чебышевский сборник.* 2022. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.
116. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

117. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1969. 656 с.
118. Williams W. E., Lighthill M. J. Diffraction by a cylinder of finite length // Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V.52. no. 2. P. 322-335.
119. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271-273.
120. Лямшев Л. М. Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 1. С. 51-58.
121. Андреева И. Б., Самоволькин В. Г. Рассеяние звука упругими цилиндрами конечной длины // Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 5. С. 637-643.
122. Su J.-H., Varadan V. V., Varadan V. K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68, No 2. P. 686-691.
123. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // Акустический журнал/ 1986. Т. 32. № 1. С. 129-131.
124. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 5. С. 699-701.
125. Белогорцев А. С., Музыченко В. В. Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 2. С. 228-234.
126. Доценко И. Е., Музыченко В. В., Рыбак С. А. Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 5. С. 922-932.
127. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
128. Лебедев А. В., Хилько А. И. Рассеяние звука упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1057-1065.
129. Белогорцев А. С., Бугаев В. В., Музыченко В. В. Некоторые особенности рассеяния звука упругими оболочками в жидкости // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 4. С. 598-604.
130. Косарев О. И. Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. №4. С. 99-103.
131. Косарев О. И. Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-техн. развития. 2017. № 3. С. 30-37.
132. Толоконников Л. А., Ефимо Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. №4. С. 3-23.
133. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
134. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

135. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
136. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
137. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
138. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
139. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
140. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т. 36. № 1. С. 12-16.
141. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
142. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.
143. Басалов Ю. А., Программная реализация квадратурных формул по параллелепipedальным сеткам в 2-мерном случае // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. - 2022. - Выпуск 1. - С. 11-17.
144. Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н., Чубариков В. Н. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. - 2024. - Т. 517. - №1. - С. 41-43. <https://doi.org/10.31857/S2686954324030074>
145. Родионов А. В., Добровольский М. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М. Интерполяция для системы концентрических сеток. Чебышевский сборник. - 2023. - Т. 24. - Вып. 3. - С. 95-121. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-3-95-121>
146. N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, Yu. A. Basalov, E. D. Rebrov, Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation Part of the Lecture Notes in Networks and Systems book series (LNNS, volume 702) // [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4\\_16](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4_16)
147. Пакетный менеджер Nuget - MathAlgo.Interpolation [Электронный ресурс], Режим доступа: <https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Interpolation>
148. Chertock G. Sound radiation from prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 7. P. 871 – 876.
149. Silbiger A. Radiation from circular pistons of elliptical profile // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 11. P. 1515 – 1522.
150. Андебуря В. А. Акустические свойства сфероидальных излучателей // Акустический журн. 1969. Т.15. № 4. С. 512 – 522.
151. Van Buren A. L. Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. Vol. 50. No. 5. Part 2. P. 1343 – 1356.

152. Baier R. V. Acoustic radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. Vol. 51. No. 5. Part 2. P. 1705 – 1716.
153. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 140 с.
154. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
155. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
156. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа 2003. 840 с.
157. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
158. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
159. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.
160. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
161. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
162. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.
163. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
164. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
165. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
166. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
167. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 86-89.
168. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871–1879.
169. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215-226.

170. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // *Чебышевский сборник*. 2022. Т. 23. Вып. 4. С. 368-381.
171. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
172. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
173. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
174. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
175. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
176. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
177. Захарова Е. М., Минашина И. К. Обзор методов многомерной оптимизации // *Информационные процессы*. 2014. Т. 14, Вып. 3. С. 256-274.
178. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
179. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.
180. Frisk G.V., DeSanto J.A. Scattering by spherically symmetric inhomogeneities // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1970. Vol. 47, № 1B. P. 172–180.
181. Überall H., George J., Farhan A.R., Mezzorani G., Nagl A., Sage K.A., Murphy J.D. Dynamics of acoustic resonance scattering from spherical targets: Application to gas bubbles in fluids // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979. Vol. 66. P. 1161–1172.
182. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // *Акуст. журн.* 2003. Том. 49. № 5. С. 590–603.
183. Martin P.A. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles // *SIAM J. Appl. Math.* 2003. Vol. 64, № 1. P. 297–308.
184. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // *Акуст. журн.* 2005. Том. 51. № 5. С. 602–613.
185. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // *Акуст. журн.* 2005. Том. 51. № 4. С. 437–446.
186. Hasheminejad S.M., Sanaei R. Ultrasonic scattering by a fluid cylinder of elliptic cross section, including viscous effects // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2008. Vol. 55, № 2. P. 391–404.



187. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Том. 55. № 4–5. С. 466–480.
188. Duck F.A., Baker A.C., Starritt H.C. (ed.) *Ultrasound in medicine*. Boca Raton: CRC Press, 2020.
189. Li P., Zhai J., Zhao Y. Stability for the acoustic inverse source problem in inhomogeneous media // *SIAM J. Appl. Math.* 2020. Vol. 80, № 6. P. 2547–2559.
190. Skudrzyk E. *The foundations of acoustics basic mathematics and basic acoustics*. New York, Wien: Springer-Verlag, 1971.
191. Исакович М.А. *Общая акустика*. М.: Наука, 1973.
192. Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1950. Vol. 22, № 4. P. 426–431.
193. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. 2008. Вып. 2. С. 132–145.
194. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах // *Дисс. . . . докт. физ.-мат. наук*. Тула, ТулГУ, 2020.
195. Ihlenburg F. *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York: Springer, 2013.
196. Burton A.J., Miller G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.* 1971. Vol. 323, № 1553. P. 201–210.
197. Бреббия К. Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов / Пер. с англ.* М.: Мир, 1987.
198. Chen K., Cheng J., Harris P.J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem // *IMA J. Appl. Math.* 2009. Vol. 74, № 2. P. 163–177.
199. Chen G., Zhou J. *Boundary element methods with applications to nonlinear problems / 2nd ed.* Springer: Dordrecht, 2010.
200. Simpson R.N., Scott M.A., Taus M., Thomas D.C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 269. P. 265–290.
201. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Appl. Anal.* 1990. Vol. 35. P. 75–92.
202. Liu Y.J., Rudolphi T.J. Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1991. Vol. 8, № 6. P. 301–311.
203. Wilton D.R., Rao S.M., Glisson A.W., Schaubert D.H., Al-Bundak O.M., Butler C.M. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1984. Vol. 32, no. 3. P. 276–281.
204. Lin T.C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1984. Vol. 103, № 2. P. 565–574.

205. Jackson J.D. Classical electrodynamics / 3rd ed. N.Y.: Wiley City, 1999.
206. Meyer M., Desbrun M., Schröder P., Barr A.H. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds // In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
207. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // ЖВМ и МФ. 2016. Том. 56. № 7. С. 1340–1348.
208. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.