

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Тульский государственный педагогический
университет им. Л.Н. Толстого»
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого)

УДК 511

Рег. № НИОКТР 122122800070-3

Рег. № ИКРСБ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научно-исследовательской работе
ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»
д-р пед. наук, профессор




Е.Ю. Ромашина
2023 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

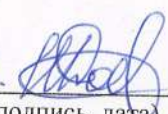
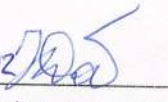
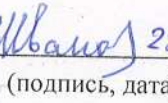
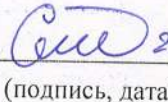
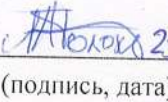
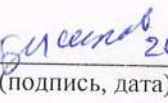




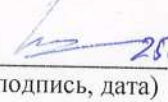
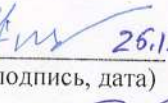
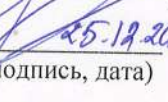
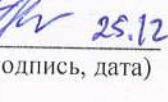
ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ МЕТОДЫ
В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ
№073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г.
(промежуточный) этап 2

Руководитель НИР,
заведующий лабораторией, канд. физ.-мат. наук.  Н. Н. Добровольский

Тула 2023

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

- Руководитель НИР,
заведующий лабораторией, к.ф.-м.н. 25.12.  Н. Н. Добровольский
(подпись, дата) (разделы 1, 2, 3, 5)
- Исполнители:
- Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н., 25.12.  Н. М. Добровольский
профессор (подпись, дата) (разделы 1, 2)
- Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н., 25.12.  В. И. Иванов
профессор (подпись, дата) (разделы 4)
- Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н., 25.12.  С. А. Скобелыцын
доцент (подпись, дата) (раздел 3)
- Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н., 25.12.  Л. А. Толоконников
профессор (подпись, дата) (раздел 5)
- Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., 25.12.  О. А. Басалов
(подпись, дата) (раздел 3)
- Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., 25.12.  Д. А. Нургулеев
доцент (подпись, дата) (раздел 1)
- Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., 25.12.  И. Ю. Реброва
доцент (подпись, дата) (раздел 2)
- Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., 25.12.  Н. Ю. Сомова
(подпись, дата) (раздел 1)
- Младший научный сотрудник, 25.12.  А. В. Афонина
(подпись, дата) (раздел 2)
- Младший научный сотрудник, 25.12.  А. В. Родионов
(подпись, дата) (раздел 2)
- Лаборант-исследователь 26.12.  Д. Ю. Ефимов
(подпись, дата) (раздел 3)
- Лаборант-исследователь, к.ф.-м.н. 25.12.2018.  К. К. Клепиков
(подпись, дата) (раздел 5)
- Лаборант-исследователь 25.12.  А. П. Крылов
(подпись, дата) (раздел 2)

Лаборант-исследователь


(подпись, дата)

О. И. Кузнецова

(раздел 2)

Лаборант-исследователь


(подпись, дата)

А. С. Подолян

(раздел 1)

РЕФЕРАТ

Отчет 137 с., 1 кн., 4 рис., 142 ист.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЁТКИ, ОБОБЩЁННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНЫЕ СЕТКИ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РЕШЁТОК, МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО РЕШЁТОК, АБСОЛЮТНО МИНИМАЛЬНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ, МЕТОД ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАНКЛЯ, ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ, СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ, УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Объектом исследования являются теоретико-числовые объекты – дзета-функция решеток, квадратурные и интерполяционные формулы, преобразования гармонического анализа, тригонометрические суммы сеток и решеток, методы применения теоретико-числовых объектов в задачах акустики.

Цель работы исследовать дзета-функции различных решеток, интерполяционные и квадратурные формулы по теоретико-числовым сеткам.

В процессе работы проводились фундаментальные исследования на стыке аналитической теории чисел, геометрии чисел, функционального анализа, численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, а также акустики, результаты которых оформлены в виде статей и докладывались на конференциях.

В результате фундаментальных исследований получены результаты показывающие высокую точность интерполяции по параллелепipedальным сеткам и сведения многомерной задачи интерполяции к одномерной.

Разработана библиотека численного интегрирования по параллелепipedальным сеткам, апробированная при решении задач акустики и показавшая свою эффективность.

Эффективность полученных методов обусловлена высокой точностью реализованных вычислительных процессов и малой трудоемкостью вычислений. Разработанные методы могут применяться как при решении фундаментальных задач теории акустики, так и прикладных задач, использующих схожий математический аппарат.

Содержание

Введение	7
1 Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепидальные сетки	24
1.1 Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток	24
1.2 Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток	25
1.3 Обобщённые параллелепидальные сетки	27
1.4 Приведение базиса решётки к треугольному виду	28
1.5 Построение обобщённой параллелепидальной сетки	30
2 Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполя- ция	32
2.1 Квазипорядок на \mathbb{R}^s и множества Быковского	32
2.2 Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области . .	34
2.3 Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского	36
2.4 Обозначения и необходимые факты	39
2.4.1 Из геометрии чисел	40
2.4.2 Тригонометрические суммы сеток и решёток	44
2.4.3 Неравенства для перенормировок на пространстве E_s^α	45
2.4.4 Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепидаль- ной сетки целочисленной решётки	48
2.4.5 Свойства оператора интерполирования	50
2.4.6 Оценки погрешности интерполирования	53
2.5 Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с прави- лом останова	54
2.6 Вложенные последовательности параллелепидальных сеток	58
3 Разработка программного обеспечения численного интегрирования и интерполирования	64
3.1 Библиотека численного интегрирования MathAlgo.Integration	64
3.2 О сведении многомерной Фурье интерполяции по параллелепидальной сетки к одномерной и быстрое преобразование Фурье	74

4	Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье	77
4.1	Некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$	77
4.2	Операторы обобщенного сдвига	80
4.3	Свертки	86
4.4	Обобщенные средние. L^p -сходимость	87
4.5	Обобщенные средние. Сходимость почти всюду	89
4.6	Приложение	91
4.7	Некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье	94
4.8	Операторы обобщенного сдвига	95
4.9	Свертки	102
4.10	Обобщенные средние. Сходимость в пространствах L^p	103
5	Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн	106
5.1	Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства	106
5.2	Постановка задачи	107
5.3	Математическая модель задачи	107
5.4	Аналитическое решение задачи	109
5.5	Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости	110
5.6	Отражение сферической волны	113
5.7	Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины	114
5.8	Постановка задачи	115
5.9	Аналитическое решение	116
5.10	Построение теоретико-числовой сетки	121
5.11	Численные исследования	121
	Заключение	126
	Список использованных источников	129

Введение

В программе исследований по теме "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике", определены следующие 6 направлений.

1. Построение теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю.

2. Получение новых форм функционального уравнения для гиперболической дзета-функции Гурвица и для гиперболической дзета-функции декартовых решёток.

3. Формирование новой теории приближения алгебраических решёток целочисленными решётками.

4. Формирование новой теории оценки погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул для заданного класса теоретико-числовых сеток.

5. Разработка прикладного программного обеспечения, реализующего численное интегрирование, решение интегральных и дифференциальных уравнений.

6. Получение интегральных представлений для ядер обобщенного преобразования Фурье, построение новых операторов обобщенного сдвига, доказательство условий ограниченности обобщенного преобразования Рисса и обобщенных преобразований Рисса в функциональных пространствах с весом.

Построение теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю

Как хорошо известно из элементарной теории сравнений мультипликативная группа \mathbb{Z}_p^* поля вычетов \mathbb{Z}_p по простому модулю p является циклической группой порядка $p - 1$, которая имеет $\varphi(p - 1)$ образующих элементов — первообразных корней. Если $G \subset \mathbb{Z}_p^*$ произвольная подгруппа, то множество $M(G, p)$, заданное равенством

$$M(G, p) = \{m \in \mathbb{N} \mid m \equiv g \pmod{p}, g \in G\},$$

является мультипликативным моноидом без однозначного разложения на простые элементы.

Последнее утверждение легко объяснить. Дело в том, что каждый класс вычетов по модулю p , взаимно простой с модулем, по теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии содержит бесконечно много простых чисел. Отсюда следует, что моноид $M(G, p)$ содержит бесконечно много псевдопростых элементов, которые являются произведением простых чисел, не входящих в моноид $M(G, p)$. Именно эти псевдопростые числа и создают эффект неоднозначности разложения на простые элементы.

Отсюда следует, что дзета-функция $\zeta(M(G, p) \mid \alpha)$ моноида $M(G, p)$ не равна соответствующему произведению Эйлера.

Нетрудно указать подмоноид $M^*(G, p)$ с однозначным разложением на простые числа. Определим его следующим образом

$$M^*(G, p) = \left\{ m = \prod_{\nu=1}^k p_{\nu}^{\beta_{\nu}} \mid p_{\nu} \equiv g_{\nu} \pmod{p}, g_{\nu} \in G, \nu = 1, \dots, k \right\}.$$

Таким образом, имеем:

$$\zeta(M^*(G, p) | \alpha) = \prod_{p_{\nu} \equiv g_{\nu} \pmod{p}, g_{\nu} \in G} \left(1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}} \right)^{-1}.$$

Одним из актуальных вопросов теории дзета-функций, соответствующих подгруппам мультипликативной группы поля вычетов по простому модулю, является вопрос о справедливости эффекта Дзвенпорта и Хейльбронна [4] о нулях дзета-функции моноида $M(G, p)$.

Функциональное уравнение

Пусть $\mathbb{P}_k = \{2^k, 3^k, 5^k, \dots\}$ — множество k -ых степеней всех простых чисел. Ясно, что $M(\mathbb{P}) = \mathbb{N}$, а $M(\mathbb{P}_k) = \mathbb{N}_k = \{1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \dots\}$ — множество k -ых степеней всех натуральных чисел. Моноид $M(\mathbb{P}_k)$ — с однозначным разложением на простые элементы, а множеством простых элементов являются псевдопростые числа, которые образуют множество \mathbb{P}_k . Легко видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ имеет единичную степенную $\frac{1}{k}$ -плотность, так как $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = [x^{\frac{1}{k}}]$.

Нетрудно видеть, что моноид $M(\mathbb{P}_k)$ регулярно удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга $\nu_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = x^{\frac{1}{k}} + O(1)$, так как при $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $\pi N \geq |t| \geq 2\pi$ для $\alpha = \sigma + it$ справедлива формула

$$\zeta(M(\mathbb{P}_k) | \alpha) = \sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^{\alpha}} + C \frac{\theta}{\alpha - \theta} \frac{1}{N^{\alpha - \theta}} + O\left(\frac{1}{N^{\sigma}}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0 . Действительно, $\zeta(M(\mathbb{P}_k) | \alpha) = \zeta(k\alpha)$,

$$\sum_{n \in M(\mathbb{P}_k), n \leq N} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n^k \leq N} \frac{1}{n^{k\alpha}}, \quad \zeta(k\alpha) = \sum_{n \leq N^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{n^{k\alpha}} + \frac{N^{\frac{1-k\alpha}{k}}}{k\alpha - 1} + O(N^{-\sigma}).$$

Так как $\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \pi(x^{\frac{1}{k}})$, то справедлив асимптотический закон

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) \sim k \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\ln x},$$

который согласно Б. М. Бредихину можно получить элементарно, минуя асимптотический закон для простых чисел. Более того, из асимптотического закона распределения простых чисел (См. [1], стр. 59)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\ln x}}\right)$$

следует, что для моноида $M(\mathbb{P}_k)$ выполнен усиленный асимптотический закон в форме Бредихина

$$\pi_{M(\mathbb{P}_k)}(x) = \int_2^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{du}{\ln u} + O\left(x^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{k}\ln x}}\right).$$

Рассмотрим последовательность, полученную объединением двух моноидов $M(\mathbb{P}_k)$ и $M(\mathbb{P}_{k+1})$, $M_{k,k+1} = M(\mathbb{P}_k) \cup M(\mathbb{P}_{k+1})$. Нетрудно видеть, что $M(\mathbb{P}_k) \cap M(\mathbb{P}_{k+1}) = M(\mathbb{P}_{k(k+1)})$. Отсюда следует, что $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = [x^{\frac{1}{k}}] + [x^{\frac{1}{k+1}}] - [x^{\frac{1}{k(k+1)}}]$. Таким образом, последовательность $M_{k,k+1}$ имеет степенную плотность с $\theta = \frac{1}{k}$ и удовлетворяет условию обобщенной леммы Сельберга с $\theta_1 = \frac{1}{k+1}$, $\theta_2 = \frac{1}{k(k+1)}$, $\theta_3 = 0$, так как $\nu_{M_{k,k+1}}(x) = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{1}{k+1}} - x^{\frac{1}{k(k+1)}} + O(1)$. Для дзета-функции справедливо равенство

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha),$$

из которого следует, что $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точек $\alpha_1 = \frac{1}{k}$, $\alpha_2 = \frac{1}{k+1}$ и $\alpha_3 = \frac{1}{k(k+1)}$, в которых полюса первого порядка, а абсцисса абсолютной сходимости удовлетворяет равенству $\sigma_{M_{k,k+1}} = \frac{1}{k}$.

Пользуясь функциональным уравнением для дзета-функции Римана мы можем написать и функциональное уравнение для $\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = \zeta(k\alpha) + \zeta((k+1)\alpha) - \zeta(k(k+1)\alpha)$. Действительно, при $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ имеем:

$$\zeta(M_{k,k+1}|\alpha) = M(k\alpha)\zeta(1-k\alpha) + M((k+1)\alpha)\zeta(1-(k+1)\alpha) - M(k(k+1)\alpha)\zeta(1-k(k+1)\alpha),$$

где $M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана.

Нетрудно видеть, что аналогичные примеры можно строить и для объединения нескольких моноидов со степенной плотностью, для которого будет выполнено сильное условие Сельберга–Бредихина.

Актуальной задачей является расширение классов моноидов и последовательностей натуральных чисел, для которых можно найти функциональное уравнение для соответствующей дзета-функции.

Приближения алгебраических решёток целочисленными решётками

По-прежнему, остаётся актуальной задача приближения алгебраических решёток целочисленными. Удовлетворительное решение этой проблемы получено только для случая квадратичных полей, хотя и в этом случае остаются нерешёнными некоторые важные задачи. К числу таких нерешённых задач относится проблема соотношений между множеством Быковского для целочисленных решёток и множеством локальных минимумов для алгебраической решётки.

Интерес к этой проблеме обусловлен тем фактом, что сумма Быковского оценивает гиперболическую дзета-функцию решётки снизу и сверху с точностью до множителя, ограниченного некоторой константой, не зависящей от решётки.

Другой вопрос связан с задачей интерполирования. В последнее время установлены важные свойства интерполяционных многочленов для периодических функций, построенных по параллелепипедальным сеткам. Возникает вопрос о погрешности таких интерполяционных формул, если соответствующая целочисленная решётка является хорошим приближением алгебраической решётки.

Оценки погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул

Вопросы, связанные с оценкой погрешности интегрирования по совокупности квадратурных формул был поставлен в работе [2].

Для произвольных целых m_1, \dots, m_s суммы $S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (1)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$\begin{aligned} |R_N[f]| &\leq C \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} = \\ &= C \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}), \end{aligned} \quad (2)$$

где сумма $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (1). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Согласно теореме 1 для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left(\left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$, как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Более того, относительно параметра гладкости α для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции.

Таким образом, возникает задача как по результатам приближенного интегрирования по нескольким квадратурным формулам получить достоверную информацию о значении интеграла и достигнутой точности приближенного интегрирования. Основы соответствующей теории об алгоритмах с правилами остановки заложена в упомянутой работе [2] и в настоящее время актуальной задачей является разработка библиотеки программ, реализующих алгоритмы интегрирования с правилами остановки.

Здесь уместно напомнить замечания профессора Н. М. Коробова из монографии [3] (стр. 159): "Вместе с тем следует отметить, что преимущество лучшей формулы не обязательно обнаруживается сразу. Не исключена, очевидно, возможность того, что это преимущество выявится лишь при весьма больших значениях N , в связи с чем применение лучшей формулы может оказаться нецелесообразным. Поэтому в вычислительной практике при выборе квадратурной формулы необходимы соответствующие эксперименты."

Интегральные представления для ядер обобщенного преобразования Фурье

В гармоническом анализе на прямой со степенным весом сначала появилось унитарное преобразование Данкля, зависящее от одного параметра $k \geq 0$, а затем двухпараметрическое (k, a) -обобщенное преобразование Фурье, частным случаем которого является преобразование Данкля ($a = 2$).

Наличие параметра $a > 0$ при $a \neq 2$ приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности.

В случае последовательности $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, деформационные свойства обобщенного преобразования Фурье весьма слабые и после некоторой замены переменных они исчезают.

Получаемое унитарное преобразование при $r = 0$ дает обычное преобразование Данкля и обладает многими его свойствами. Оно названо обобщенным преобразованием Данкля.

В дальнейшей работе предполагается определить оператор сплетения, устанавливающий связь дифференциально-разностного оператора второго порядка, для которого ядро обобщенного преобразования Данкля является собственной функцией, с одномерным оператором Лапласа и позволяющий записать ядро в удобном для его оценок виде. В отличие от оператора сплетения для преобразования Данкля он имеет ненулевое ядро.

В дальнейшей работе предполагается также на основе свойств обобщенного преобразования Данкля установить свойства (k, a) -обобщенного преобразования Фурье при $a = 2/(2r + 1)$.

Исследования по этим направлениям, развивающие классические работы по аналитической теории чисел, гармоническому анализу и механике, позволили получить новые не имеющие аналогов результаты, разбитые по главам.

Глава 1. Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепипедальные сетки.

В данной главе приводятся новые свойства гиперболической дзета-функции диагональных двумерных унимодулярных решёток. Доказывается теорема об аналитическом продолжении этой функции.

В работе [8] была доказана полнота метрического пространства двумерных диагональных унимодулярных решёток. Каждая двумерная диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (см. [6], [9]).

Первая цель данной главы — описать свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции двумерных диагональных унимодулярных решёток в левой полуплоскости.

Так как определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной главе предложены алгоритмы построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

При решении задач многомерного численного интегрирования большую роль играет выбор сеток, с помощью которых строятся квадратурные формулы.

Использование равномерных сеток в этом случае затруднено в силу «проклятья размерности», а при применении случайных или псевдослучайных последовательностей нельзя на классе аналитических функций получить оценку погрешности лучшую, чем $|R_N[f]| = O(N^{-1})$, где N — число точек сетки.

В 1959 году Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с использованием параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от размерности s и порядка гладкости α .

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Подробнее о классах функций и погрешностях интегрирования с использованием различных видов сеток см., например [10].

Вторая цель данной главы — описать алгоритмы построения одного из видов таких сеток — обобщённых параллелепипедальных сеток.

Глава 2. Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполяция.

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В 2002 году В. А. Быковский получил принципиально новые оценки снизу и сверху, которые совпадали по порядку.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценке гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру даётся модифицированная оценка Быковского через минимальные решения линейного сравнения.

Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях дополняется обобщённой леммой Коробова об оценке остаточного ряда и рядом других модификаций в доказательстве теоремы Бахвалова—Коробова, что и позволило доказать усиленную теорему Бахвалова—Коробова—Быковского об оценке гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где $(a_j, N) = 1$ ($j = 1, \dots, s$), и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| \ll \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad (\text{Н. С. Бахвалов [13], Н. М. Коробов [28]}).$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ ($\alpha > 1$) решётки и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda(\vec{a}, N)} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}, \quad (3)$$

где \sum' означает, что из области суммирования исключен набор $\vec{m} = \vec{0}$, а символ Коробова $\delta_N(a)$ задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Усеченным норменным спектром решётки Λ называется множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением усеченной нормы. Порядок точки λ усеченного норменного спектра обозначим через $q(\lambda)$.

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)^{-\alpha} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda) \lambda^{-\alpha}. \quad (4)$$

В работе [41] было получено усиление леммы Н. М. Коробова о числе решений линейного сравнения в прямоугольных областях, что позволило усилить классическую теорему Н. С. Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функции целочисленной решётки решений линейного сравнения.

Дальнейший анализ проблемы оценки числа решений линейного сравнения в прямоугольных областях и сопоставления с результатами В. А. Быковского из работы [15]

показали, что можно объединить подходы Н. М. Коробова доказательства теоремы Н. С. Бахвалова с подходами В. А. Быковского.

Первая цель работы — описать новую оценку сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях и усиленную теорему Бахвалова — Быковского.

В работе [50] были изучены аналоги Фурье интерполяции для случая, когда периодическая функция многих переменных задана в узлах обобщенной параллелепipedальной сетки целочисленной решетки. Была построена теория интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепipedальную сетку целочисленной решетки.

В работе [2] было изучено распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток и применено это распределение для произведения некоторых типов сеток. В частности, были рассмотрены такие новые понятия как: алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки; концентрический алгоритм приближенного интегрирования; линейный оператор $A_{M,\vec{p}}$ взвешенных сеточных средних на пространстве периодических функций E_s^α .

Вторая цель данной главы перенести указанные понятия на теорию интерполирования функций многих переменных для случая узлов интерполяции, образующих обобщенную параллелепipedальную сетку целочисленной решетки, и рассмотреть концентрические алгоритмы приближенного интерполирования по обобщенным параллелепipedальным сеткам целочисленных решёток.

Также в главе дается обзор по результатам Тульской школы теории чисел по вопросам интерполяции периодических функций многих переменных, заданных в узлах обобщенной параллелепipedальной сетки целочисленной решетки, и по алгоритмам численного интегрирования с правилом остановки, необходимые для понимания основного результата исследований за 2023 год, приведенный в главе 4. Приводятся необходимые факты из: геометрии чисел; тригонометрических сумм сеток и решёток; неравенств для перенормировок на пространстве E_s^α ; интерполяционные формулы для обобщенной параллелепipedальной сетки целочисленной решётки; свойства оператора интерполирования; оценки погрешности интерполирования. Наряду с известными фактами и определениями, полученными ранее в Тульской школе теории чисел, содержатся новые понятия и факты связанные с интерполированием по сдвинутым параллелепipedальным сеткам.

Также в главе приводятся алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом остановки содержит новые определения, связанные с переносом понятия концентрический алгоритм приближенного интегрирования на случай мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интерполирования.

В главе излагаются новые вопросы приближенного интерполирования с правилами остановки. Рассмотрен наиболее важный и интересный для практической реализации случай вложенных последовательностей параллелепipedальных сеток. Получена оценка нормы разности двух операторов интерполирования по решётке и подрешётке, что позволило в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного интерполирования периодических функций взять величину максимума модуля разности этих операторов на точках большей параллелепipedальной сетки.

Глава 3 Разработка программного обеспечения численного интегрирования интерполирования

В данной главе приведены алгоритмы на которых основана разработанная библиотека численного многомерного интегрирования MathAlgo.Integration, опубликованная в

пакетном менеджере Nuget (<https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Integration>).

Использование теоретико-числовых алгоритмов позволяет, либо увеличить на порядки точность при одинаковой трудоемкости, либо сократить в разы трудоемкость, решения задачи численного интегрирования в задачах акустики по распространению плоских волн. Данные задачи возникают при интегрировании сферических гармоник, либо при сведении дифференциальных уравнений в частных производных или интегральных уравнений к вычислению кратных интегралов.

Так же в данной главе приводится доказательство полученного впервые в мире результата о сведении задачи многомерной интерполяции к одномерной. Что позволяет построить алгоритм численного интерполирования по s -мерным параллелепипедальным сеткам за $O(N \ln(N))$ операций, где N число узлов интерполяции.

Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье

С 2012 года в гармоническом анализе на прямой со степенным весом интенсивно изучается двухпараметрическое (k, a) -обобщенное преобразование Фурье, предложенное S. Ben Said, T. Kobayashi, B. Orsted и обобщающее преобразование Данкля ($a = 2$), зависящее только от одного параметра $k \geq 0$. Вместе с увеличением разнообразия унитарных преобразований наличие параметра $a > 0$ при $a \neq 2$ приводит к появлению деформационных свойств, например, для функций из пространства Шварца обобщенное преобразование Фурье может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Быстрое убывание сохраняется только для последовательности $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. Некоторая замена переменной в этом случае улучшает и другие свойства обобщенного преобразования Фурье. Обобщенное преобразование Данкля, получающееся после замены переменной при $a = 2/(2r + 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, лишено деформационных свойств и, в значительной степени, уже изучено. В настоящей работе изучается обобщенное преобразование Ганкеля, получающееся после замены переменной при $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Для него описано инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, найден дифференциально-разностный оператор, для которого ядро обобщенного преобразования Ганкеля является собственной функцией. На основе новой теоремы умножения для функций Бесселя Voubatra — Negzaoui — Sifi построены два оператора обобщенного сдвига, исследована их L^p -ограниченность и положительность. Для теоремы умножения дано простое доказательство. Определены две свертки, для которых доказаны теоремы Юнга. С помощью сверток определены обобщенные средние, для которых предложены достаточные условия L^p -сходимости и сходимости почти всюду. Исследованы обобщенные аналоги средних Гаусса — Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \geq -1/2$, $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) x^{-\alpha} J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1), \quad n \geq 1,$$

— символ Похгаммера.

Пусть $a > 0$, $k \geq 0$, $2k + a - 1 > 0$, $\lambda = (2k - 1)/a$, $v_{k,a}(x) = |x|^{2k+a-2}$ — степенной вес, $d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx$ — нормированная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda + 1)$.

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [70] определили двухпараметрическое (k, a) -обобщенное унитарное преобразование Фурье, которое в одномерном случае имеет

вид

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) b_{k,a}(xy) d\mu_{k,a}(x), \quad (5)$$

где ядро

$$b_{k,a}(xy) = j_{\lambda}\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)} \frac{xy}{(ai)^{2/a}} j_{\lambda+\frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right). \quad (6)$$

Оно стало обобщением классического преобразования Фурье на случай степенного веса на прямой ($a = 2, k = 0$), а также обобщением преобразования Данкля ($a = 2$) [71]. Но в отличие от преобразований Фурье и Данкля, для которых пространство Шварца является инвариантным, обобщенное преобразование Фурье при $a \neq 2$ обладает деформационными свойствами и пространство Шварца для него не является инвариантным [72]. В частности, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ быстро убывает на бесконечности для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, если только $a = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Понятно, что деформационные свойства во многом связаны с аргументом $|xy|^{a/2}$ в ядре (6). Если в (5) и (6) сделать замены

$$(2/a)^{1/2}|x|^{a/2}\text{sign}x \rightarrow x, \quad (2/a)^{1/2}|y|^{a/2}\text{sign}y \rightarrow y, \quad (7)$$

то мера $d\mu_{k,a}(x)$ перейдет в меру $d\nu_{\lambda}(x) = c_{\lambda}|x|^{2\lambda} dx$, $c_{\lambda}^{-1} = 2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)$, ядро (6) перейдет в ядро

$$e_{k,a}(xy) = j_{\lambda}(xy) + \frac{e^{-i\pi/a}\Gamma(\lambda+1)}{2^{2/a}\Gamma(\lambda+1+2/a)} |xy|^{2/a}\text{sign}(xy) j_{\lambda+\frac{2}{a}}(xy),$$

а унитарное преобразование (5) — в унитарное преобразование

$$\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{k,a}(xy) d\nu_{\lambda}(x).$$

Если $a = \frac{2}{2r+1}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то функция $e_{k,a}(x)$ будет целой функцией экспоненциального типа 1 и преобразование $\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}$ становится недеформированным. Оно носит название обобщенного преобразования Данкля, так как при $r = 0$ получается обычное преобразование Данкля. Свойства обобщенного преобразования Данкля изучены в [72, 73].

В настоящей работе мы остановимся на свойствах преобразования $\tilde{\mathcal{F}}_{k,a}$ при $a = \frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}$. Мы назовем его обобщенным преобразованием Ганкеля. Оно имеет вид

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(x), \quad (8)$$

где $\lambda > -1/2$,

$$e_{r,\lambda}(x) = j_{\lambda}(x) + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} x^{2r}\text{sign}x j_{\lambda+2r}(x). \quad (9)$$

Хотя функция (9) имеет конечную гладкость в нуле, мы увидим, что преобразование (8) является достаточно содержательным.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_{\lambda}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\nu_{\lambda}(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{\infty} = \text{vraisup}_{\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — множество непрерывных бесконечно малых на бесконечности функций, $C_K(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций с компактным носителем. Как обычно, показатель p и сопряженный показатель p' связаны соотношением $1/p + 1/p' = 1$.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров. Для функции $f(x)$, заданной на прямой, $f_e(x)$, $f_o(x)$ — ее четная и нечетная части.

Для преобразования (8) устанавливается инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций и находится дифференциально-разностный оператор, для которого ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ является собственной функцией по каждой переменной. Строятся два оператора обобщенного сдвига. Построения существенно опираются на новую теорему умножения для нормированных функций Бесселя, установленную в 2022 году М.А. Voubatra, S. Negzaoui и М. Sifi [75]. В приложении для нее дается простое доказательство. Определяются две свертки и для них приводятся неравенства Юнга. Для обобщенных средних, определяемых с помощью сверток, исследуется сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и почти всюду.

Также в главе излагаются свойства двухпараметрического (k, a) -обобщенного преобразование Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$, $k, a > 0$, на прямой. При $a \neq 2$ оно обладает деформационными свойствами и, в частности, для функции f из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_{k,a}(f)$ может не быть бесконечно дифференцируемым или быстро убывающим на бесконечности. Доказано, что инвариантным множеством для обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ и дифференциально-разностного оператора $|x|^{2-a}\Delta_k f(x)$, где Δ_k — лапласиан Данкля, является класс

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2}) : F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 \text{ — четные}\}.$$

Для $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, рассмотрены два оператора обобщенного сдвига τ^y и $T^y = (\tau^y + \tau^{-y})/2$. Для них предложены простые интегральные представления, позволившие доказать их L^p -ограниченность при $1 \leq p \leq \infty$ и $\lambda = r(2k - 1) > -1/2$. При $\lambda \geq 0$ оператор T^y положительный и его L^p -норма равна 1. Определены две свертки и для них доказана теорема Юнга. Для обобщенных средних, определенных с помощью сверток, установлено достаточное условие L^p -сходимости. Изучены обобщенные аналоги средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых на \mathbb{R} и быстро убывающих на бесконечности функций, $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка α , $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)x^{-\alpha} J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1), \quad n \geq 1,$$

— символ Похгаммера,

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

— преобразование Фурье на прямой \mathbb{R} .

Преобразование Фурье является унитарным преобразованием на прямой с единичным весом. Совершенно естественно возникает вопрос о его унитарных обобщениях для

случая прямой с весом. Для прямой со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$, $\lambda \geq -1/2$, таким обобщением стало преобразование Данкля (см. [88, 89])

$$\mathcal{F}_\lambda(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x),$$

где ядро и мера на прямой равны

$$e_\lambda(xy) = j_\lambda(xy) - \frac{ixy}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(xy), \quad d\nu_\lambda(x) = \frac{|x|^{2\lambda+1} dx}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)}.$$

Преобразование Фурье получается при $\lambda = -1/2$. Для преобразования Данкля, как и для преобразования Фурье, пространство Шварца является инвариантным.

Пусть $a > 0$, $k \geq 0$, $2k + a - 1 > 0$, $\lambda = (2k-1)/a$, $v_{k,a}(x) = |x|^{2k+a-2}$ — степенной вес, $d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx$ — нормированная степенная мера на прямой, $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda+1)$, $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций ($L^\infty(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) = L^\infty(\mathbb{R})$) с конечной нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_{k,a} \right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$C_b(\mathbb{R})$ — подмножество $L^\infty(\mathbb{R})$ непрерывных функций, $C_0(\mathbb{R})$ — подмножество $C_b(\mathbb{R})$ исчезающих на бесконечности функций, $C_K(\mathbb{R})$ — подмножество $C_0(\mathbb{R})$ функций с компактным носителем, $C^\infty(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций.

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в работе [90, гл. 5], в которой предложено двухпараметрическое (k, a) -обобщенное унитарное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x), \quad (10)$$

в котором ядро

$$B_{k,a}(x, y) = b_{k,a}(xy) = j_\lambda\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)} \frac{xy}{(ai)^{2/a}} j_{\lambda+\frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}|xy|^{a/2}\right). \quad (11)$$

Преобразование Данкля получается при $a = 2$.

В отличие от преобразования Данкля у (k, a) -обобщенного преобразования Фурье при $a \neq 2$ появляются деформационные свойства. Например, $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a = 2$. Более точно, множество $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset C^\infty(\mathbb{R})$, если только a четное. Оно состоит из быстро убывающих на бесконечности функций, если только $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. Если a — иррациональное, то для любой нетривиальной $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_{k,a}(f) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [91].

Учитывая важность в гармоническом анализе наличия у унитарного преобразования инвариантного класса функций, быстро убывающих на бесконечности, возникает вопрос о существовании такого класса у (k, a) -обобщенного преобразования Фурье. Мы даем положительный ответ на поставленный вопрос.

Пусть для $a > 0$

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2}) : F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 \text{ — четные}\}, \quad (12)$$

$$\delta_{k,a} f(x) = |x|^{2-a} \Delta_k f(x), \quad (13)$$

где Δ_k — лапласиан Данкля [89, гл. 2, 2.2].

Мы показываем, что класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ инвариантен для преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ и дифференциально-разностного оператора $\delta_{k,a}$. Равенство $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедливо только при $a = 2$. Класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ впервые появился в [91], где показано, что при $a = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо вложение $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. Отметим также, что класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ плотен в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $p < \infty$ и пространстве $C_0(\mathbb{R})$.

Последовательность $a_n = 2/n$ разбивается на две последовательности $a_r = 2/(2r+1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $a_r = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, которым соответствуют две последовательности обобщенных преобразований Фурье. Первой последовательности при $r = 0$ принадлежит преобразование Данкля. Остальные преобразования этой последовательности после некоторой замены переменной также становятся недеформированными унитарными преобразованиями с ядрами, являющимися целыми функциями экспоненциального типа (см. [91]). Замена переменной для второй последовательности может привести к недеформированным унитарным операторам с ядрами только конечной гладкости, то есть эти две последовательности преобразований различаются. В работе изучается (k, a) -обобщенное преобразование Фурье и основное внимание уделяется второму случаю $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Случай $a = 1$ был известен до появления общего преобразования Фурье. Например, при $a = 1$ и $k = 0$ обобщенное преобразование Фурье является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N+1, 2)$ [92].

Устанавливаются некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье и, в частности, доказывается инвариантность класса $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. В последующих секциях $a = 1/r$. В секции 2 изучаются два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z), \quad (14)$$

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda \left(\frac{2}{a} |yz|^{a/2} \right) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Оператор τ^y определен в [93]. В [94] для него получено интегральное представление и доказана L^p -ограниченность при $1 \leq p \leq \infty$. В [95, 96] предложено другое интегральное представление. Оператор T^y ранее был известен для преобразования Данкля (см. [97, гл. 3]). В отличие от оператора τ^y он может быть положительным. Для операторов τ^y , T^y дается простая форма записи, из которой легко получается L^p -ограниченность в большей области параметров. Исследуются условия положительности оператора T^y . Операторы обобщенного сдвига являются важной составляющей гармонического анализа в пространствах с весом. Они необходимы для определения модулей гладкости функций и с их помощью определяются важные интегральные операторы, в частности, потенциал и преобразование Рисса. Определяются две свертки и для них доказывается теорема Юнга. Как пример их применения в определяются обобщенные средние и исследуются их L^p -сходимость.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от существенных параметров. Для функции f на прямой f_e — ее четная, а f_o — нечетная части.

Глава 5 Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн

В главе рассматривается задача об отражении сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Предполагается, что однородное изотропное упругое полупространство покрыто непрерывно-неоднородным

плоским слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе решения аналогичной задачи в случае падения плоской волны.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по плоским волнам. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению для давления в плоской падающей волне. Поэтому давление в рассеянной волне в случае падения сферической волны на полупространство с неоднородным жидким слоем записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению для давления в рассеянной волне при падении плоской волны. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, приближенное аналитическое решение которой получено методом степенных рядов.

Также в главе рассматривается дифракция звуковых волн неоднородной изотропной цилиндрической оболочкой конечной длины произвольной толщины. Предполагается, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Плотность и модули упругости материала оболочки описываются непрерывными функциями радиальной координаты. Первичное поле возмущений представляет собой плоскую гармоническую звуковую волну, наклонно падающую на тело.

Для рассеянного поля используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Показано, что использование квадратурных формул по параллелепipedальным сеткам Коробова позволяет сократить число вычислений при приближенном вычислении интегралов. Этот метод сравнивается с вычислением интегралов методом последовательного интегрирования по квадратурной формуле трапеций. Проведено сопоставление времени вычисления потенциала поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой, двумя методами вычисления интегралов.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала оболочки на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

В рамках выполнения исследований опубликованы следующие статьи:

В. И. Иванов, “Одномерное (k, a) -обобщенное преобразование Фурье”, Тр. ИММ УрО РАН, 29, № 4, 2023, 92–108

В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 3, с. 5–25.

А. В. Родионов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 3, С. 95–121.

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II // Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 4, С. 311–324.

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 217–221.

А. В. Родионов. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепipedальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 222–227.

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Дифракция звуковых

волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 274–288.

Л. А. Толоконников. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим неоднородным слоем жидкости // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 320–330.

Опубликованы тезисы и материалы конференций:

Буркин И.М., Кузнецова О.И. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье // Сборник трудов XVI Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Россия, Казань, КФУ, 22-27 августа 2023). Казань: КФУ, 2023. Т. 66. С. 54-56.

Родионов, А. В. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток / А. В. Родионов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 273-277. – EDN VEPNGV.

Крылов, А. П. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток / А. П. Крылов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 267-269. – EDN IYKPBW.

Басалов, Ю. А. Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении / Ю. А. Басалов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 251-253. – EDN ROCRNV.

Иванов, В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой / В. И. Иванов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 256-262. – EDN UMHNQ.

Подолян, А. С. Численное решение линейных интегральных уравнений / А. С. Подолян // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории : Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26–29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский госу-

дарственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С. 269-273. – EDN XRAWAM.

Исполнители проекта выступили с докладами на международных и всероссийских конференциях:

II Всероссийская научно-практическая конференция “Математика в современном мире”, посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве (19–23 сентября 2023 г., Вологодский государственный университет, ул. С. Орлова, 6, г. Вологда)

Добровольский Н. Н. «Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» секционный доклад 20 сентября

<https://www.mathnet.ru/conf2288>

Третья конференция Математических центров России 10 – 15 октября 2023 г. на базе РНОМЦ «Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета», г. Майкоп, Республика Адыгея.

Добровольский Н.Н. «О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях» секционный доклад 14 октября

<https://mc-conf.adygnet.ru/>

XVI Международная Казанская школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” Сборник трудов (Казань, 22 – 27 августа 2023 г.

Кузнецова О. И. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье. Секционный доклад 25 августа.

<https://mathcenter.kpfu.ru/functiontheory>

XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» [Тула, 26-29 сентября 2023 г.]

Родионов А. В. Алгоритмические вопросы построения обобщённых параллелепипедальных сеток. Секционный доклад 28 сентября

Крылов А. П., Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета-функция двумерных диагональных унимодулярных решёток. секционный доклад 28 сентября

Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н. Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении. Секционный доклад 28 сентября

Иванов В. И. Обобщенное преобразование Ганкеля на прямой. Секионный доклад 28 сентября

Подолян А. С. Численное решение линейных интегральных уравнений. Секционный доклад 28 сентября

<http://poivs.tsput.ru/conf/international/XXII/ru>

Сотрудниками до 39 лет подготовлены и представлены к защите диссертации:

Кузнецова О. И. В диссертационный совет 24.2.417.02 Тульского государственного университета представлена к защите диссертация на тему "Конструирование экстремально мультистабильных хаотических систем и их использование для преобразования информации" на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ". Диссертация принята к защите 26.12.2023 г. Информацию по диссертации смотрите на сайте диссертационного совета:

https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/Kuznetsova_OI_/

Добровольский Н. Н. В диссертационный совет МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова представлена к защите диссертация на тему "Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы" на соискание степени доктора физико-математических-наук по специальности 1.1.5 "Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика". Диссертация принята к защите 22.12.2023 г. Информацию по диссертации смотрите на сайте диссертационного совета:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.4/2840>

В рамках выполнения проекта разработано прикладное программное обеспечение:

Басалов Ю. А. Библиотека реализующая интегрирование с помощью параллелепипедальных сеток. Год создания 2023. Год выпуска 2023. Страна (страны) выпуска RU, Библиотека реализует интегрирование с помощью параллелепипедальных сеток на языке C# и опубликована в пакетном менеджере Nuget <https://www.nuget.org/packages/MathAlgo.Integration>.

В рамках выполнения проекта члены коллектива участвовали в научных семинарах в качестве организаторов и участников

Межрегиональный семинар по аналитической теории чисел Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова под руководством Чубарикова В. Н. и Добровольского Н. М.

Межрегиональный семинар по теоретико-числовому методу в приближенном анализе ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Добровольского Н. М.

Региональный семинар тульской школы теории чисел на базе молодежной научно-исследовательской лаборатории теоретико-числовых методов в приближенном анализе ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Добровольского Н. Н., Добровольского Н. М.

Глава 1

Гиперболическая дзета-функция решеток и обобщенные параллелепипедальные сетки

1.1. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной двумерной решётки \mathbb{Z}^2 : $\Lambda(d_1, d_2) = \{(d_1 m_1, d_2 m_2) | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, $(d_1, d_2 > 0)$.

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda(d) = \Lambda(d, \frac{1}{d})$, $d > 0$. Она имеет простой базис $\vec{\lambda}_1 = (d, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, \frac{1}{d})$ и базисную матрицу $M(d)$ вида

$$M(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*(d) = \Lambda(\frac{1}{d}, d)$ имеет взаимную базисную матрицу

$$M^*(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что всегда в этой работе $d \geq 1$, так как взаимная решётка будет симметричной к ней диагональная решётка с параметром $\frac{1}{d} \leq 1$.

В работе [8] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [7], стр.165).

ЛЕММА 1. Пусть $d_1 \geq d_2$, тогда $\rho(\Lambda(d_1), \Lambda(d_2)) \leq \ln \left(2 \frac{d_1}{d_2} - 1 \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. \square

ЛЕММА 2. Пусть $d_1 \geq d_2$, $\Lambda(d_1) = A \cdot \Lambda(d_2)$ и $\|A - E_2\| \leq \delta < 1$, тогда $d_1 - d_2 = d_2 \delta_1$, где $0 \leq \delta_1 \leq \frac{\delta}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. \square

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d) = \Lambda\left(d, \frac{1}{d}\right)$ имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{dm^\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{d}m^\alpha} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{4}{dm^\alpha \cdot \frac{1}{d}n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{d}\right)|\alpha\right)$.

Пользуясь тем, что $d \geq 1$, и вводя обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{d}m\right)^\alpha}\right) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d^\alpha}{m^\alpha}\right),$$

получим

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2\zeta(\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4\zeta^2(\alpha) + 4\zeta(\alpha)f(d|\alpha). \quad (1.1)$$

1.2. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, где у неё полюс второго порядка.

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - \text{множитель Римана, } \alpha = \sigma + it, \sigma < 0.$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера.

ЛЕММА 3. Для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки справедливо функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha) \left(\frac{1}{d^\alpha} + d^\alpha\right) + 2f(d|\alpha) + 4(M(\alpha)\zeta(1-\alpha))^2 + \\ + 4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)f(d|\alpha) \end{aligned}$$

при $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция $f(d|\alpha)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому, подставляя в выражение для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки функциональное уравнение для дзета-функции Римана, получим утверждение леммы. \square

ТЕОРЕМА 2. Для любой диагональной унимодулярной решётки $\Lambda(d)$ ($d \geq 1$) гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка с вычетом

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, дзета-функция Римана мероморфна с единственным полюсом первого порядка при $\alpha = 1$ и раскладывается в ряд Лорана в точке $\alpha = 1$

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n,$$

где

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} \right) - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

— константы Стильеса, а $\gamma_0 = \gamma$ — константа Эйлера.

Таким образом, для дзета-функции Римана справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \gamma + r(\alpha),$$

где

$$r(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n = (\alpha - 1)r_1(\alpha), \quad r_1(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^{n-1}$$

и функции $r(\alpha)$ и $r_1(\alpha)$ — голоморфные функции на всей комплексной области.

Отсюда следует, что

$$\zeta^2(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2\gamma}{\alpha - 1} + 2r_1(\alpha) + (\gamma + r(\alpha))^2, \quad \text{Res}_1 \zeta^2(\alpha) = 2\gamma.$$

Так как все функции, стоящие в правой части равенства (1.1) являются либо голоморфными, либо мероморфными кроме точки $\alpha = 1$, то и левая часть является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс второго порядка. Для вычета в этой точке имеем равенство

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4 \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m} \right)$$

и теорема полностью доказана. \square

ТЕОРЕМА 3. На метрическом пространстве двумерных диагональных унимодулярных решёток гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)$ и её вычет в точке $\alpha = 1$ являются непрерывными функциями, как функции от параметра d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*(d)|\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{d}\right)|\alpha\right)$, то при $0 < d < 1$ необходимо положить $f(d|\alpha) = f\left(\frac{1}{d}|\alpha\right)$, тогда равенство (1.1) будет справедливо для любого $d > 0$.

Все функции, стоящие в правой части равенства (1.1) являются непрерывными функциями от d при $d > 0$, поэтому и левая часть будет непрерывной функцией от d .

Аналогично, имеем

$$\text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = 2 \left(\frac{1}{d} + d \right) + 8\gamma + 4f(d|1),$$

поэтому вычет в точке $\alpha = 1$ является непрерывной функцией от d .

Так как метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток гомеоморфно пространству $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, то теорема полностью доказана. \square

1.3. Обобщённые параллелепипедальные сетки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть в вещественном арифметическом пространстве \mathbb{R}^s задана линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$n_1 \vec{a}_1 + \dots + n_s \vec{a}_s,$$

где n_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в \mathbb{R}^s , а сами векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ — базисом этой решетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}^s \}. \quad (1.2)$$

Если $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js})$ ($1 \leq j \leq s$) — произвольный базис решетки Λ , то взаимную решетку Λ^* можно задать взаимным базисом $\vec{a}_j^* = (a_{j1}^*, a_{j2}^*, \dots, a_{js}^*)$ ($1 \leq j \leq s$), который определяется равенством

$$(\vec{a}_j, \vec{a}_i^*) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (1 \leq j, i \leq s).$$

Из определения взаимного базиса и свойств определителей обратных и транспонированных матриц следует, что $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Символом G_s будем обозначать полукоткрытый единичный s -мерный куб $G_s = [0; 1]^s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется пересечение взаимной решетки к решетке Λ с единичным s -мерным кубом $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Среди рассматриваемых нами решёток особый интерес представляют целочисленные, так как получаемые в этом случае параллелепипедальные сетки — рациональные, и квадратурные формулы с использованием таких сеток будут с равными весами.

В дальнейшем в статье будут рассматриваться только целочисленные решётки и соответствующие им рациональные сетки.

Пусть базис целочисленной решетки Λ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Тогда базис взаимной решетки Λ^* задается матрицей

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix},$$

где $b_{\nu\mu} = \frac{A_{\nu\mu}}{\det \Lambda}$, а величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A .

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ ($\nu = 1, \dots, s$) взаимной решетки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \quad (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}. \quad (1.3)$$

Из определения обобщённой параллелепипедальной сетки легко увидеть, что она состоит из $\det \Lambda$ узлов.

Равенство (1.3) не даёт простого представления того, каким образом строить обобщённую параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$. Вопросу построения такой сетки посвящён следующий раздел.

1.4. Приведение базиса решётки к треугольному виду

Как было сказано выше, обобщённая параллелепипедальная сетка с рациональными узлами представляет собой пересечение решётки, взаимной к целочисленной, с s -мерным единичным кубом. Построение такой сетки будет наиболее удобным, если базис соответствующей целочисленной решётки представлен в виде $\vec{b}_\nu = (b_{\nu 1}, \dots, b_{\nu \nu}, 0, \dots, 0)$.

Другими словами, базисная матрица решётки имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Более того, базисные векторы можно выбрать таким образом, что все их ненулевые компоненты удовлетворяли условию $0 \leq a_{\nu\mu} < a_{\mu\mu}$ ($1 \leq \mu < \nu \leq s$).

Существование такого базиса следует из теоремы 1 монографии Дж. В. С. Касселса «Введение в геометрию чисел» [11].

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории цепных дробей.

Пусть p и q — произвольные натуральные числа. Тогда дробь $\frac{p}{q}$ можно представить в виде конечной цепной дроби

$$\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \dots, a_n) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Отрезки этой дроби $\frac{p_k}{q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$ ($k \leq n$) называются подходящими дробями к данному числу $\frac{p}{q}$. Понятно, что $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$.

Сформулируем некоторые свойства подходящих дробей.

1. Для всех $0 \leq k \leq n$ подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ — несократима.
2. Для всех $0 \leq k \leq n$ выполнено равенство $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$.

ЛЕММА 4. Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is})$ и $\vec{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{js})$ — два произвольных вектора, принадлежащие некоторому базису целочисленной решётки Λ , при чём для некоторого t ($1 \leq t \leq s$) числа a_{it} и a_{jt} — натуральные. Пусть, также, дроби $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{it}}{a_{jt}}$ — подходящие дроби к числу $\frac{a_{it}}{a_{jt}}$.

Тогда набор векторов, полученный заменой в данном базисе векторов \vec{a}_i и \vec{a}_j соответственно на векторы

$$\vec{b} = -q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j \quad \vec{c} = (-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j),$$

также является базисом этой решётки, при этом:

- 1) $b_t = 0$;
- 2) $c_t = (a_{it}, a_{jt})$, где (a_{it}, b_{it}) — наибольший общий делитель чисел a_{it} и a_{jt} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство следует из равенства $\frac{a_{it}}{a_{jt}} = \frac{p_n}{q_n}$.

Для доказательства второго свойства воспользуемся тем, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима. Тогда $a_t = (a_t, b_t) \cdot p_n$, $b_t = (a_t, b_t) \cdot q_n$. Получим

$$c_t = (-1)^{n+1} ((a_t, b_t) \cdot q_{n-1} p_n - (a_t, b_t) \cdot p_{n-1} q_n) = (a_t, b_t).$$

Покажем теперь, что новый набор векторов также является базисом данной решётки. Если A — исходный базис решётки, то указанное преобразование задаётся матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -q_n & \dots & p_n & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & (-1)^{n+1} q_{n-1} & \dots & (-1)^n p_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице B элементы $b_{ii} = -q_n$, $b_{ij} = p_n$, $b_{ji} = (-1)^{n+1} q_{n-1}$, $b_{jj} = (-1)^n p_{n-1}$; прочие элементы главной диагонали — единицы; остальные элементы матрицы — нули.

Модуль определителя $|\det B| = |(-1)^{n+1} (q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})| = 1$, из чего следует, что данное преобразование является унимодулярным, а значит матрица $B \cdot A$ является базисной для данной решётки. \square

Теперь опишем алгоритм приведения базиса решётки Λ к нижнему треугольному виду.

Шаг 1. Запишем базисную матрицу решётки Λ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $i = s$.

Шаг 2. Каждую строку матрицы с первой по i -тую, для которой $a_{ji} < 0$ ($1 \leq j \leq i$) заменим на противоположную. Если $a_{ii} = 0$, то поменяем местами i -тую строку с произвольной j -той строкой ($1 \leq j \leq i$), в которой $a_{ji} \neq 0$.

Заметим, что матрица, полученная в результате указанных преобразований будет являться базисной матрицей решётки Λ . Существование такой строки, в которой $a_{ji} \neq 0$ следует из линейной независимости базисных векторов.

В результате выполнения первого шага получим базисную матрицу решётки Λ , в которой все элементы $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ii}$ неотрицательны, при этом $a_{ii} \neq 0$.

Шаг 3. Для строки с номером $j = 1$ выполним следующую операцию. Если $a_{ji} \neq 0$, заменим первую строку матрицы на строку $-q_n \vec{a}_i + p_n \vec{a}_j$, а i -тую строку на $(-1)^{n+1} (q_{n-1} \vec{a}_i - p_{n-1} \vec{a}_j)$. Здесь \vec{a}_i и \vec{a}_j — i -тая и j -тая строки матрицы соответственно, p_{n-1}, p_n — числители, q_{n-1}, q_n — знаменатели подходящих дробей к дроби $\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ ($\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{ii}}{a_{ij}}$).

Повторим шаг 3 для значений $j: 2 \leq j \leq i - 1$.

Согласно лемме 4 в результате выполнения этого шага мы получим матрицу, в которой $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{i-1i} = 0$, $a_{ii} > 0$.

Повторим шаги 2–3 для $i = s - 1, \dots, \dots, 1$. В результате получим базисную матрицу решётки Λ , приведённую к верхнему треугольному виду.

Заметим, что в полученной матрице все элементы на главной диагонали положительны, а прочие ненулевые элементы могут принимать произвольные значения.

1.5. Построение обобщённой параллелепипедальной сетки

Пусть базис целочисленной решётки Λ имеет нижний треугольный вид, причём все её элементы неотрицательны (элементы на главной диагонали строго положительны в силу полноты решётки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (1.4)$$

Её детерминант равен $\det \Lambda = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss}$.

В этом случае базисная матрица взаимной решётки Λ^* будет верхней треугольной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где

- при $i > j$ $b_{ij} = 0$;
- при $i = j$ $b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$;
- при $i < j$ $b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} a_{jk}$.

Её детерминант равен $\det \Lambda^* = \frac{1}{\det \Lambda}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть базисная матрица целочисленной решётки Λ задана равенством (1.4), а базисная матрица взаимной решётки Λ^* — равенством (1.5). Тогда обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \right\} \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}, \quad (1.6)$$

где $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$ — дробная часть вектора \vec{x} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символом M обозначим конечное подмножество векторов решётки Λ^*

$$M = \left\{ k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s \mid k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s \right\}. \quad (1.7)$$

Поскольку $k_i = 0, \dots, a_{ii} - 1, i = 1, \dots, s$, то мощность $|M| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{ss} = |M(\Lambda)|$.

Покажем теперь, что разность любых двух различных векторов из множества M вида $\vec{x}_1 = k_1 \vec{b}_1 + \dots + k_s \vec{b}_s$ и $\vec{x}_2 = m_1 \vec{b}_1 + \dots + m_s \vec{b}_s$ не является целым вектором.

Так как векторы \vec{x}_1 и \vec{x}_2 различны, то найдётся такое значение t , что $k_t \neq m_t$. Будем считать, что $k_t > m_t$, и t — наименьшее среди таких значений, то есть $k_i = m_i$, при $i < t$.

Рассмотрим t -тую компоненту разности $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$y_t = (k_1 - m_1)b_{1t} + \dots + (k_{t-1} - m_{t-1})b_{(t-1)t} + (k_t - m_t)b_{tt} + (k_{t+1} - m_{t+1})b_{(t+1)t} + \dots + (k_s - m_s)b_{st}.$$

В ней $k_1 - m_1 = \dots = k_{t-1} - m_{t-1} = 0$, так как значение t выбрано минимальным, для которого $k_t \neq m_t$. С другой стороны, $b_{(t+1)t} = \dots = b_{st} = 0$, так как базисная матрица решётки Λ^* имеет верхний треугольный вид.

Таким образом, получаем

$$y_t = (k_t - m_t)b_{tt}.$$

Поскольку

$$0 \leq m_t < k_t < a_{tt},$$

то

$$0 < k_t - m_t < a_{tt}.$$

Из данных неравенств и равенства

$$b_{tt} = \frac{1}{a_{tt}}$$

имеем

$$0 < y_t = (k_t - m_t)b_{tt} < a_{tt}b_{tt} = 1.$$

Из сказанного следует, что разность любых двух векторов из множества M имеет хотя бы одну нецелую компоненту y_t , а значит дробные части этих векторов различны, что и доказывает утверждение теоремы. \square

Глава 2

Гиперболическая дзета-функция решеток и многомерная интерполяция

2.1. Квазипорядок на \mathbb{R}^s и множества Быковского

Рассмотрим на \mathbb{R}^s квазипорядок $\vec{x} \leq \vec{y}$, заданный выполнением s соотношений $|x_\nu| \leq |y_\nu|$ ($\nu = 1, \dots, s$). Ясно, что отношение

$$\theta = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^s, \vec{x} \leq \vec{y} \& \vec{y} \leq \vec{x}\}$$

является отношением эквивалентности и фактормножество \mathbb{R}^s/θ будет частично упорядоченным множеством изоморфным \mathbb{R}_+^s , где $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел (См. [33], стр. 37).

Будем через $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$, где для вещественных x полагаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$, обозначать усеченную норму \vec{x} . Ясно, что из $\vec{x} \leq \vec{y}$ следует $q(\vec{x}) \leq q(\vec{y})$.

Так как решётка $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \quad (2.1)$$

является подмножеством \mathbb{R}^s , то на ней задается индуцированный квазипорядок. Можно рассмотреть отношение эквивалентности $\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$, которое задается равенством

$$\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)} = \{(\vec{m}, \vec{n}) \mid \vec{m}, \vec{n} \in \Lambda(\vec{a}, N), \vec{m} \leq \vec{n} \& \vec{n} \leq \vec{m}\},$$

но фактормножество $\Lambda(\vec{a}, N)/\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$ в случае произвольной решётке решений линейного сравнения не просто описать. Для удобства два решения \vec{m}_1 и \vec{m}_2 , принадлежащих $\theta_{\Lambda(\vec{a}, N)}$, будем называть ассоциированными и писать $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$. Если из $\vec{0} < \vec{m}_1 \leq \vec{m}_2$ следует $\vec{m}_1 \sim \vec{m}_2$, то \vec{m}_1 и \vec{m}_2 называются минимальными относительно квазипорядка.

Для простоты изложения мы будем предполагать, что все коэффициенты a_ν взаимно просты с модулем N : $(a_\nu, N) = 1$ ($\nu = 1, \dots, s$). Именно этот случай наиболее важен для метода оптимальных коэффициентов, так как это соглашение входит в определение параллелепипедальных сеток Коробова.

В работе [15] В. А. Быковский ввёл понятие минимального решения сравнения (2.1). Ненулевое решение называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения (m'_1, \dots, m'_s) , для которого

$$|m'_1| \leq |m_1|, \dots, |m'_s| \leq |m_s|; \quad |m'_1| + \dots + |m'_s| < |m_1| + \dots + |m_s|.$$

Другими словами, ненулевое решение \vec{m} называется *минимальным*, если не существует другого ненулевого решения \vec{m}' такого, что $\vec{m}' < \vec{m}$. Таким образом, относительно квазиупорядка на решётке $\Lambda(\vec{a}, N)$ минимальное решение \vec{m} является просто минимальным элементом решётки.

Отметим, что в работе [16] было введено другое понятие — локальный минимум второго рода, так как это требовалось для обобщения результатов В. А. Быковского на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Будем множество всех минимальных решений \vec{m} решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ обозначать через $B(\Lambda(\vec{a}, N))$ и называть минимальным множеством Быковского. Если $\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$, то и $-\vec{m} \in B(\Lambda(\vec{a}, N))$.

Из дискретности решётки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решётки её минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто, при этом $\bar{x}_j < \det \Lambda$ ($j = 1, \dots, s$). Более того, можно утверждать, что $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s < N$.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{sj})$ ($1 \leq j \leq r$, $r = r(\Lambda)$) есть все минимальные решения сравнения (2.1) из минимального множества $B(\Lambda)$ решётки Λ . Так как для любого минимального решения \vec{x} точка $-\vec{x}$ также является минимальным решением, то $r(\Lambda)$ — чётное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество минимальных решений, где из каждой пары \vec{x} и $-\vec{x}$ взято ровно одно. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \cup -B^*(\Lambda). \quad (2.2)$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предполагать, что нумерация минимальных решений согласована с разбиением (2.2): $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$) и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$). Ясно, что для гиперболического параметра решётки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leq j \leq r} \bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}.$$

Введем для произвольного вектора \vec{x} понятие его индекса — количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s .

Будем предполагать, что для выбранной нумерации выполнено дополнительное соглашение $r(\vec{x}_1) \leq r(\vec{x}_2) \leq \dots \leq r(\vec{x}_{r^*})$. Ясно, что $r^* = r_1^* + \dots + r_s^*$, где r_ν^* — количество минимальных решений из $B^*(\Lambda)$ с индексом ν . Нетрудно видеть, что с единичным индексом имеется ровно s минимальных решений: $\vec{x}_1 = (N, 0, \dots, 0), \dots, \vec{x}_s = (0, \dots, 0, N)$.

Минимальные решения индекса 2 можно перечислить с помощью цепных дробей согласно результатам работы [23].

Обозначим через $B_\nu^*(\Lambda)$ множество минимальных решений с индексом ν . Ясно, что $B^*(\Lambda) = \bigcup_{\nu=1}^s B_\nu^*(\Lambda)$.

Аналогично, решётку решений $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ представим как объединение множеств точек индекса ν : $\Lambda = \{\vec{0}\} \cup (\bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu)$, где $\Lambda_\nu = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, r(\vec{x}) = \nu\}$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Ясно, что справедливо представление для гиперболической дзета-функции решётки:

$$\zeta_H(\Lambda | \alpha) = \sum_{\nu=1}^s \sum_{\vec{x} \in \Lambda_\nu} \frac{1}{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^\alpha}.$$

Ещё Н. М. Коробов в 1959 году в работах [24, 25] установил, что остаточный ряд в гиперболической дзета-функции решётки решений $\Lambda(\vec{a}, N)$, в котором хотя бы одна компонента по модулю не меньше N , оценивается как $O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$.

В соответствии с этим результатом Н. М. Коробова положим $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^* \cup \Lambda_\nu^{**}$, где $\Lambda_\nu^* = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| < N\}$, $\Lambda_\nu^{**} = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda_\nu, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| \geq N\}$. Кроме этого, положим $\Lambda^* = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^*$, $\Lambda^{**} = \bigcup_{\nu=1}^s \Lambda_\nu^{**}$.

Сделаем ещё несколько важных замечаний и обозначений.

Во-первых, для любого $j > s$ и минимального решения $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ имеем $\max_{1 \leq \nu \leq s} |x_{\nu j}| \leq \frac{N}{2}$.

Во-вторых, будем говорить что вектора \vec{P} и \vec{x} подобны: $\vec{P} \simeq \vec{x}$, если $r(\vec{P}) = r(\vec{x})$ и нулевые координаты у обоих векторов совпадают.

В-третьих, для любого \vec{P} с $\max_{1 \leq j \leq s} |P_j| < N$ и индекса ν через $b(\vec{P})$ обозначим минимальное решение $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$ такое, что $\vec{P} \simeq \vec{x}_j$, $\vec{x}_j \leq \vec{P}$ и величина $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)}$ имеет минимальное значение. Отсюда следует, что $\frac{q(\vec{P})}{q(\vec{x}_j)} \leq \frac{q(\vec{P})}{q(\Lambda)}$, так как для гиперболического параметра справедливо равенство $q(\Lambda) = \min_{\vec{x}_j \in B^*} q(\vec{x}_j)$.

2.2. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^s [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$.

ЛЕММА 5. Для любых целых b и λ справедливо равенство

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [41]. \square

ЛЕММА 6. Справедливы неравенства

$$\frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} \leq \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leq \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пользуясь леммой 5, получим

$$\begin{aligned} \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} &= \sum_{b=1}^{\infty} \left(\sum_{m_j=bN}^{bN+N-1} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} + \sum_{m_j=-(bN+N-1)}^{-bN} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \right), \\ \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} &= 2 \sum_{b=2}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} \leq \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leq 2 \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{(bN)^\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}. \end{aligned}$$

\square

Обозначим для целого вектора \vec{n} с индексом $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu$ и целого вектора $\vec{\lambda} + \vec{1} \simeq \vec{n} - \vec{1}$ через $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$ число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) \cap \Lambda_\nu^*, \vec{m} \simeq \vec{n} - \vec{1}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ясно, что

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T_\nu(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \quad (2.4)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu > 1$, $b(\vec{n} - \vec{1}) = \vec{x}_j$ и $n_\mu = 1$, $\lambda_\mu = -1$ при $x_{\mu j} = 0$. Тогда справедлива оценка

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil, \quad (2.5)$$

где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число не меньшее вещественного числа x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s)$ положим $|\vec{x}| = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_s})$. Определим величины $k_\mu = \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil$ для $|x_{\mu j}| > 0$, $k_\mu = 1$ для $x_{\mu j} = 0$. Положим для $\vec{l} = (l_1, \dots, l_s)$, что $\vec{l} \cdot \vec{x} = (l_1 x_1, \dots, l_s x_s)$.

Покроем прямоугольный параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n})$ объединением прямоугольных параллелепипедов вида $\Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|)$, где целые $0 \leq l_1 \leq k_1 - 1, \dots, 0 \leq l_s \leq k_s - 1$:

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) \subseteq \bigcup_{\vec{0} \leq \vec{l} \leq \vec{k} - \vec{1}} \Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|).$$

Отсюда следует, что

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \sum_{\vec{0} \leq \vec{l} \leq \vec{k} - \vec{1}} T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N). \quad (2.6)$$

Покажем, что $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N) \leq 1$. Допустим, что число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|) \cap \Lambda_\nu^*, \vec{m} \simeq |\vec{x}_j| - \vec{1} \end{cases} \quad (2.7)$$

больше 1. Тогда, согласно определению величины $\delta_N(m)$, числа $a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda$ и $a_1 m'_1 + \dots + a_s m'_s + \lambda$ будут кратны N . Но тогда и их разность также будет кратна N :

$$a_1(m_1 - m'_1) + \dots + a_s(m_s - m'_s) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Так как системы m_1, \dots, m_s и m'_1, \dots, m'_s различны, то система $m_1 - m'_1, \dots, m_s - m'_s$ будет нетривиальным решением сравнения (2.1) и, следовательно,

$$|m_1 - m'_1| < \overline{x_{1j}}, \dots, |m_s - m'_s| < \overline{x_{sj}},$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает что $T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda} + \vec{l} \cdot |\vec{x}|; |\vec{x}_j|, \lambda; N) \leq 1$.

Пользуясь доказанным неравенством, получим

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq k_1 \dots k_s = \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left\lceil \frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $r(\vec{n} - \vec{1}) = \nu > 1$, минимальное решение $\vec{x}_j \simeq \vec{n} - \vec{1}$, $\vec{x}_j \leq \vec{n}$ и $n_\mu = 1$, $\lambda_\mu = -1$ при $x_{\mu j} = 0$. Тогда справедлива оценка

$$T_\nu(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left[\frac{n_\mu}{|x_{\mu j}|} \right]. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следствия дословно повторяет доказательство теоремы. \square

2.3. Усиленная теорема Бахвалова — Коробова — Быковского

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова — Коробова — Быковского для произвольного модуля N . В соответствии с разбиением $\Lambda \setminus \{\vec{0}\} = \Lambda^* \cup \Lambda^{**}$ получим:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) + \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha), \quad \zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^*} \frac{1}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^\alpha},$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^{**}} \frac{1}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^\alpha}.$$

ЛЕММА 7. **Обобщённая лемма Коробова.** *Справедливы неравенства*

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \geq \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu, \quad (2.9)$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leq \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения величины $\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha)$ следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) &= \sum_{|m_1| \geq N} \sum_{m_2, \dots, m_s \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{s-2} \sum_{|m_1|, \dots, |m_\nu| < N} \sum_{|m_{\nu+1}| \geq N} \sum_{m_{\nu+2}, \dots, m_s \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} + \\ &+ \sum_{|m_1|, \dots, |m_{s-1}| < N} \sum_{|m_s| \geq N} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 6, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)}{N^\alpha} \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^\nu (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^{s-1} \right) \leq \\
& \leq \zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) \leq \\
& \leq \frac{2\zeta(\alpha)}{N^\alpha} \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^\nu (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1-\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \right)^{s-1} \right).
\end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} = \zeta(\alpha) - \alpha \int_N^\infty \frac{[x] - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx, \\
& \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} = \alpha \int_N^\infty \frac{x - N}{x^{\alpha+1}} dx \leq \\
& \leq \alpha \int_N^\infty \frac{[x] - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx \leq \\
& \leq \alpha \int_N^\infty \frac{x - N + 1}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha} = \\
& = \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^\alpha}, \\
& \zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \leq \zeta(\alpha) - \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) & \geq \frac{2(\zeta(\alpha) - 1)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{2}{N^\alpha}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu, \\
\zeta_H(\Lambda^{**}|\alpha) & \leq \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{\frac{2}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}{1 + 2\zeta(\alpha)} \right)^\nu.
\end{aligned}$$

□

Перейдём к изучению величины $\zeta_H(\Lambda^*|\alpha)$, для которой справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda^*|\alpha) = \sum_{\nu=2}^s \zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha),$$

так как $\Lambda_1^* = \emptyset$.

Пусть $\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)$ — произвольное минимальное решение индекса ν . Обозначим через $\vec{P}(\vec{x}_j)$, заданный равенствами $P_\mu = 0$, если $x_{\mu j} = 0$, и $P_\mu = N-1$, если $|x_{\mu j}| > 0$. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda_\nu^*} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 8. Справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) \leq \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)^\nu \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{x}_j > \vec{m} \text{ или } \vec{m} > \vec{P}(\vec{x}_j), \\ \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s), & \text{если } \vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j). \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ & = \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{k} \leq \vec{m}} \delta_N(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s). \end{aligned}$$

Воспользуемся следствием для оценки внутренней суммы, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \\ & \leq \sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j), m_1, \dots, m_s \geq 0} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) 2 \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil = \\ & = 2^\nu \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil. \end{aligned}$$

Для внутренней суммы имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil \leq \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \left(\frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} + 1 \right) = \\ & = \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left(\sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|}^{N-1} \frac{m_\mu}{m_\mu^\alpha} - \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|+1}^N \frac{m_\mu - 1}{m_\mu^\alpha} \right) = \\ & = \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left(\frac{|x_{\mu j}|}{|x_{\mu j}|^\alpha} + \sum_{m_\mu = |x_{\mu j}|+1}^{N-1} \frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{N-1}{N^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Далее заметим, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) &= \int_{x+1}^N \frac{1}{u^\alpha} du \leq \sum_{m=x+1}^{N-1} \frac{1}{m^\alpha} \leq \int_x^{N-1} \frac{1}{u^\alpha} du = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{m_\mu=|x_{\mu j}|}^{N-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu+1)^\alpha} \right) \left\lceil \frac{m_\mu}{|x_{\mu j}|} \right\rceil \leq \\ &\leq \frac{2}{|x_{\mu j}|^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \left(\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{|x_{\mu j}|^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N-1)^{\alpha-1}} \right) - \frac{N-1}{N^\alpha} \right) \leq \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha}. \end{aligned}$$

Окончательно для $\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha)$ имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{\vec{x}_j \leq \vec{m} \leq \vec{P}(\vec{x}_j)} \frac{\delta_N(m_1 a_1 + \dots + m_s a_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \leq \\ &\leq \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{|x_{\mu j}|} \right) \frac{1}{|x_{\mu j}|^\alpha} = \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} \prod_{|x_{\mu j}| > 0} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right), \\ &\zeta_H(\Lambda_\nu^*|\alpha) \leq \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right)^\nu. \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6. *Гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) &< \sum_{\nu=2}^s \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right)^\nu \sum_{\vec{x}_j \in B_\nu^*(\Lambda)} \frac{1}{q(\vec{x}_j)^\alpha} + \\ &+ \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N^\alpha} \sum_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - \frac{2}{1+2\zeta(\alpha)} \right)^\nu. \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 7 и 8.

□

2.4. Обозначения и необходимые факты

В данном разделе приведены без доказательства необходимые факты из работ [50] и [2].

2.4.1. Из геометрии чисел

Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_s , где $G_s = [0; 1)^s$ — полуоткрытый единичный s -мерный куб. Предварительно напомним некоторые определения и обозначения.

Пусть Λ — произвольная целочисленная решетка в \mathbb{R}^s , т.е. Λ — подрешетка фундаментальной решетки \mathbb{Z}^s . Другими словами $\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \dots + m_s\vec{\lambda}_s \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$ и $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система целочисленных векторов. С алгебраической точки зрения все решетки как бесконечные абелевы группы с s образующими изоморфны \mathbb{Z}^s .

Параллелепипед $\Pi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \{\alpha_1\vec{\lambda}_1 + \dots + \alpha_s\vec{\lambda}_s \mid 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s < 1\}$ — фундаментальный параллелепипед решетки, объем которого обозначается через $\det \Lambda$, называется детерминантом, или определителем, решетки и является ее инвариантом, не зависящим от выбора базиса решетки.

Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T\},$$

а величина T — его параметром.

Назовем r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ подмножество

$$K_r(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

Для решетки Λ рассмотрим ее взаимную решетку Λ^* . По определению взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда следует, что для любой решетки Λ справедливы равенства $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$. Нетрудно видеть, что фундаментальная решетка \mathbb{Z}^s совпадает со своей взаимной решеткой и является подрешеткой взаимной решетки любой целочисленной решетки. Кроме того, если $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^s$, то $\mathbb{Z}^s \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$. Для любого $C \neq 0$ $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Ясно, что если $\Lambda_1 \subset \Lambda$, то $M(\Lambda) \subset M(\Lambda_1)$.

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора \vec{x} и \vec{y} решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$.

В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешётки M решётки Λ равен числу классов решётки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решётки Λ по одному из каждого класса относительно решётки M называется полной системой вычетов решётки Λ относительно M . Каждая полная система вычетов решётки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решётки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* относительно фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s , т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно, полную систему вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решётка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, $p_1 = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$, $p_2 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решётки \mathbb{Z} по подрешётке $p\mathbb{Z}$. Дадим многомерный аналог этому понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Полную систему вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ назовем минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Полную систему вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ , состоящую из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, назовем абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.*

Такую полную систему вычетов будем обозначать через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решётки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 6. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на \mathbb{Z}^s . Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

ЛЕММА 9. *Для любой целочисленной решётки Λ и подрешетки Λ_1 справедливо вложение*

$$M_H^*(\Lambda) \subset M_H^*(\Lambda_1). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Из доказательства леммы 9 следует, что если $M_H^*(\Lambda) = \{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_N\}$, то для абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda_1)$ справедливо

равенство

$$M_H^*(\Lambda_1) = \bigcup_{j=1}^N \{\vec{m}_j, \vec{m}_{j,1}, \dots, \vec{m}_{j,N_1-1}; \quad \vec{m}_j \equiv \vec{m}_{j,\nu} \pmod{\Lambda} \ (\nu = 1, \dots, N_1 - 1)\}, \quad (2.14)$$

где $N_1 = \frac{\det \Lambda_1}{\det \Lambda}$. Из этого представления следует, что с каждым вычетом \vec{m}_j из $M_H^*(\Lambda)$ можно связать множество $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) \subset \Lambda$, заданное равенством

$$R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j) = \{\vec{m}_{j,\nu} - \vec{m}_j | \nu = 1, \dots, N_1 - 1\}.$$

Так как все $\vec{m}_{j,\nu}$ являются представителями различных классов вычетов по подрешётке Λ_1 , то элементы из $R_{\Lambda, \Lambda_1}(\vec{m}_j)$ не принадлежат решётке Λ_1 .

Для произвольной целочисленной решётки Λ определим второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Вторым гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Третьим гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ . Другими словами все целые точки этого креста несравнимы по модулю Λ .*

Пусть $N = \det \Lambda$. Множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K(T)$ обозначим через $K_Z(T)$.

Так как $|K_Z(1)| = 3^s$, то для любого $N \geq 3^s$ определим функцию $T_s(N)$ из условий $|K_Z(T_s(N))| \leq N$, $|K_Z(T_s(N) + 1)| > N$. Ясно, что

$$q_3(\Lambda) \leq T_s(N) \leq q_2(\Lambda). \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что при $N < 3^s$ надо полагать $q_3(\Lambda) = 0$, так как минимальный крест $K(1)$ содержит больше элементов, чем полная система вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из N элементов.

В работе [46] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *При $N > e^{s \cdot e}$ справедливы неравенства:*

$$\begin{aligned} & \frac{(s-1)!(N-1)}{2^s \left(\ln N + \frac{3s}{2}\right)^{s-1}} \leq T_s(N) \leq \\ & \leq \frac{(s-1)!N}{2^s (\ln N + \ln((s-1)!)) - s \ln 2 - (s-1) \ln(\ln N))^{s-1}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из определений 7 и 8 сразу следует, что

$$q_3(\Lambda) < q(\Lambda), \quad q_3(\Lambda) \leq q_2(\Lambda).$$

Общие нетривиальные соотношения между этими тремя гиперболическими параметрами, по-видимому, установить непросто. Априори даже неясно, всегда ли существует полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно целочисленной решётки Λ такая, что выполнены соотношения

$$K(q_3(\Lambda)) \subset M^*(\Lambda) \subset K(q_2(\Lambda)) ? \quad (2.17)$$

Рассмотрим для примера случай решётки $\Lambda = N\mathbb{Z}^s$. Очевидно, что

$$M(N\mathbb{Z}^s) = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}^s, \quad |M(N\mathbb{Z}^s)| = \det(N\mathbb{Z}^s) = N^s. \quad (2.18)$$

Нетрудно видеть, что в качестве минимальной гиперболической полной системы вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки $N\mathbb{Z}^s$ можно взять

$$M^*(N\mathbb{Z}^s) = \{-N_1, \dots, N_2\}^s. \quad (2.19)$$

Отсюда следует, что

$$q(\Lambda) = N, \quad q_2(\Lambda) = N_2^s \leq \frac{\det N\mathbb{Z}^s}{2^s} \quad \text{и} \quad q_3(\Lambda) = N_1. \quad (2.20)$$

ЛЕММА 10. *Для любой целочисленной решётки Λ найдется минимальная гиперболическая полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки Λ такая, что выполнены соотношения (2.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

ЛЕММА 11. *Абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки Λ удовлетворяет соотношению (2.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Введем для произвольного вектора \vec{x} понятие его индекса – количество ненулевых координат. Обозначим эту величину через $r(\vec{x})$. Таким образом наименьший индекс у нулевого вектора: $r(\vec{0}) = 0$, а максимальное значение индекса равно s . Для целого вектора \vec{m} рассмотрим его индекс по модулю 2, т.е. количество его нечетных координат, которое обозначим через $r_2(\vec{m})$.

ЛЕММА 12. *Если для целочисленной решётки Λ вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и имеет минимальное значение усеченной нормы ($q(\vec{m}) = q(\Lambda)$), то для третьего гиперболического параметра решётки Λ справедлива оценка сверху:*

$$q_3(\Lambda) \leq \frac{q(\Lambda)}{2^{r(\vec{m}) - r_2(\vec{m})}}. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Обозначим через J_s множество всех целочисленных векторов \vec{j}_s , каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$.

ЛЕММА 13. Пусть для заданного $\vec{j}_s \in J_s$ вектора $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ целочисленной решётки Λ определены из условий:

$$\lambda_{1,j_1} = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_1}|, \quad (2.22)$$

$$\lambda_{\nu,1} = \dots = \lambda_{\nu,j_{\nu-1}} = 0, \quad \lambda_{\nu,j_\nu} = \min_{\vec{x} \in \Lambda^{(\nu)} \setminus \{\vec{0}\}} |x_{j_\nu}| \quad (\nu = 2, \dots, s), \quad (2.23)$$

где $\Lambda^{(\nu)} = \{\vec{x} \in \Lambda \mid x_{j_1} = \dots = x_{j_{\nu-1}} = 0\}$, тогда они образуют базис решётки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Пусть числа $N_1(\vec{j}_s), \dots, N_s(\vec{j}_s)$ определены равенствами:

$$N_\nu(\vec{j}_s) = \lambda_{\nu,j_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Заметим, что из доказательства леммы следует равенство

$$\det \Lambda = N_1(\vec{j}_s) \dots N_s(\vec{j}_s).$$

ТЕОРЕМА 8. Для любой целочисленной решётки Λ второй гиперболический параметр решётки удовлетворяет соотношению:

$$q_2(\Lambda) \leq \min_{\vec{j}_s \in J_s} \left[\frac{N_1(\vec{j}_s)}{2} \right] \dots \left[\frac{N_s(\vec{j}_s)}{2} \right]. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

2.4.2. Тригонометрические суммы сеток и решёток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [48] и [47].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Тригонометрической суммой сетки M и произвольного целочисленного вектора \vec{m} называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки Λ , целого вектора \vec{m} и произвольного вектора \vec{x} из взаимной решётки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_\Lambda^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решётки Λ будем называть выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^*/\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где \vec{m} — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепipedальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решётки Λ^* целочисленной решётки Λ будем называть выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s/\Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где \vec{x} — произвольный вектор взаимной решётки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решётки \mathbb{Z}^s по подрешётке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 9. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 10. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

2.4.3. Неравенства для перенормировок на пространстве E_s^α

Так как переход к произвольной периодической функции многих переменных, заданной на прямоугольном s -мерном параллелепипеде $\prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$, с периодом $b_j - a_j$ по каждой переменной x_j ($1 \leq j \leq s$), делается с помощью простой линейной замены переменных, то дальше для простоты изложения будет рассматриваться только случай единичного s -мерного куба и класса периодических функций E_s^α , у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$c(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{m})(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha| \quad (2.25)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Наряду с нормой (2.25) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \quad (2.26)$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Относительно норм (2.26) и (2.27) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [51]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\|f(\vec{x})\|_{l_2} \leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \quad (2.28)$$

Последнее неравенство (2.28) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $c(\vec{m}) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работы [46].

Для натурального $t > 1$ положим, что

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (2.29)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (2.30)$$

суммирование проводится только по натуральным m_1, \dots, m_j .

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m>t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (2.31)$$

ЛЕММА 14. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (2.32)$$

ЛЕММА 15. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (2.33)$$

ЛЕММА 16. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (2.34)$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.35)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.37)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (2.38)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in K(t)} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |K_Z(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |K_Z(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В работе [46] доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 12. Справедливо неравенство

$$|K_Z(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (2.40)$$

ТЕОРЕМА 13. Справедливо неравенство

$$|K_Z(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (2.41)$$

Из теоремы 12 и равенств (2.39) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Из оценки снизу (2.41) и равенства (2.39) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (2.43)$$

Таким образом, оценка сверху (2.42) и оценка снизу (2.43) совпадают по порядку относительно t .

2.4.4. Интерполяционные формулы для обобщенной параллелепипедальной сетки целочисленной решётки

Теорема 10 позволяет доказать, что произвольную функцию $f(\vec{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 14. *Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [51]. \square

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решётки \mathbb{Z}^s по подрешётке Λ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (2.44)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (2.45)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

В другом контексте конечный ряд Фурье и интерполяционные формулы по обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки встречаются в работе В. А. Быковского [44]. Впервые многомерные конечные ряды Фурье для равномерной сетки встречаются в работах Н. М. Коробова [55].

Тригонометрический полином (2.44) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решётки \mathbb{Z}^s по подрешётке Λ . Возникает вопрос о том, как оптимально выбирать $M^*(\Lambda)$, чтобы погрешность интерполирования была наименьшей. Ответ на этот вопрос зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача. Мы остановимся на классе E_s^α .

Рассмотрим сначала решётку $N\mathbb{Z}^s$. Как известно, для любой целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ справедливо включение: $N\mathbb{Z}^s \subset \Lambda$. В следующей теореме будем использовать обозначения (2.18) и (2.19).

ТЕОРЕМА 15. *Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и интерполяционного полинома $S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})$ справедливы неравенства*

$$|c(\vec{m}) - c_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{m})| \leq$$

$$\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + \frac{2^\alpha + 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}\right)^{s-1} \frac{s(2^\alpha + 2\zeta(\alpha))}{N^\alpha}, \quad (2.46)$$

$$\|f(\vec{x}) - S_{M(N\mathbb{Z}^s), M^*(N\mathbb{Z}^s)}(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} 2^\alpha}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}. \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Обозначим через $M(\Lambda, \vec{x})$ сдвинутую обобщенную параллелепипедальную сетку, которая задается равенством

$$M(\Lambda, \vec{x}) = \{\{\vec{y} + \vec{x}\} | \vec{y} \in M(\Lambda)\}.$$

Докажем аналог теоремы 14 для случая сдвинутой обобщенной параллелепипедальной сетки.

ТЕОРЕМА 16. Для любой функции $f(\vec{z})$ на $M(\Lambda, \vec{x})$ справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\vec{z} \in M(\Lambda, \vec{x})$, то $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}_0$, где $\vec{y}_0 \in M(\Lambda)$, и имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} \right) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0), \vec{m}_j)} = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} \right). \end{aligned}$$

По теореме 10 имеем:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}_0 - \vec{x} - \vec{y}), \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} s^*(\vec{y}_0 - \vec{y}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m}_j)} = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \delta_\Lambda^*(\vec{y}_0 - \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}_0) = f(\vec{z}).$$

Воспользуемся рядом Фурье для функции $f(\vec{z})$, получим по теореме 9

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda, \vec{x})} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i((\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{m}_j))} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n} - \vec{m}_j)} \frac{1}{N} s(\vec{n} - \vec{m}_j, \Lambda) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}_j) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})}. \end{aligned}$$

\square

2.4.5. Свойства оператора интерполирования

Формула (2.44) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α , который каждой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (2.44). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (2.48)$$

Теорема 16 позволяет задать целый класс операторов интерполирования $I_{\Lambda, \vec{x}}$ на пространстве E_s^α . Каждой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ поставим в соответствие ее интерполяционный многочлен

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (2.49)$$

ЛЕММА 17. Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство

$$\|I_\Lambda f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}. \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

ЛЕММА 18. Для любой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ справедливо неравенство

$$\|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \quad (2.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению нормы $\|\cdot\|_{l_1}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z})\|_{l_1} &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \left| \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + \vec{m}) e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{n})} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |c(\vec{m} + \vec{n})| = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} |c(\vec{n})| = \|f(\vec{z})\|_{l_1}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

\square

ЛЕММА 19. Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{x})$ вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.53)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (2.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

ЛЕММА 20. Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{z})$ вида

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \quad (2.55)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) = f(\vec{z}). \quad (2.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле (2.49)

$$\begin{aligned} I_{\Lambda, \vec{x}} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{x} + \vec{y}) e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, -\vec{x} - \vec{y})} \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ &= \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{k} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k} - \vec{m}, \vec{x})} \frac{1}{N} s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) = c(\vec{m}), \end{aligned}$$

так как $s(\vec{k} - \vec{m}, \Lambda) \neq 0$ только при $\vec{k} = \vec{m}$ и лемма доказана. \square

Множество тригонометрических полиномов вида (2.53) обозначим через P_Λ .

ТЕОРЕМА 17. *Для любой целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda \geq 3^s$ и $q_3(\Lambda) \geq 1$ на пространстве $P^{(q_3(\Lambda))}$ для абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки Λ справедливо равенство (2.54).*

При $t > q_3(\Lambda)$ найдется тригонометрический полином $f(\vec{x}) \in P^{(t)}$ такой, что равенство (2.54) нарушается. В частности,

$$P^{(t)} \cap \ker I_\Lambda \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Для любого $\vec{m} \in M^*(\Lambda)$ обозначим через $E_{s, \vec{m}}^\alpha$ банахово подпространство пространства E_s^α , состоящее из функций вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}. \quad (2.57)$$

Ясно, что имеет место разложение E_s^α в прямую сумму $E_{s, \vec{m}}^\alpha$:

$$E_s^\alpha = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \oplus E_{s, \vec{m}}^\alpha.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ представима в виде сумм

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} f_{\vec{m}}(\vec{x}),$$

где

$$f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}.$$

В работе [51] показано, что для проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ имеется конечное представление:

$$A_{\vec{m}}(f(\vec{x})) = f_{\vec{m}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\{\vec{x} + \vec{y}\}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m})} \quad (\vec{m} \in M^*(\Lambda)).$$

Здесь для произвольного вектора \vec{x} под его дробной частью подразумевается вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$.

ТЕОРЕМА 18. На пространстве E_s^α операторы $A_{\vec{m}}$ и I_Λ коммутируют:

$$I_\Lambda(A_{\vec{m}}(f(\vec{x}))) = A_{\vec{m}}(I_\Lambda(f(\vec{x}))) = \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (2.58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

ТЕОРЕМА 19. На пространстве E_s^α ядро $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ имеет нормированный базис:

$$f_{\vec{m}, \vec{n}}(\vec{x}) = \frac{1}{(q(\vec{m} + \vec{n}))^\alpha} (e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}) \quad (\vec{m} \in M_H^*(\Lambda), \vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}). \quad (2.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство E_s^α разлагается в прямую сумму ядра $\ker I_\Lambda$ оператора интерполирования I_Λ и пространства тригонометрических полиномов P_Λ :

$$E_s^\alpha = \ker I_\Lambda \oplus P_\Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Понятие проектора $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ является частным случаем оператора взвешенных сеточных средних из работы [2].

Для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (2.60)$$

Обозначим через $A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m})$ действие линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 21. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.61)$$

справедливо равенство

$$A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m}) = \frac{S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (2.62)$$

где $S_{M,\bar{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S_{M,\bar{\rho}}^*(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\bar{\rho}}f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (2.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. \square

Отсюда непосредственно следует, что проектор $A_{\vec{m}} : f(\vec{x}) \rightarrow f_{\vec{m}}(\vec{x})$ получается из оператора взвешенных сеточных средних при $\rho_{\vec{m}}(\vec{y}) = e^{-2\pi i(\vec{y},\vec{m})}$, $\vec{y} \in M(\Lambda)$. Кроме этого, отметим, что все проекторы относятся к числу нормальных операторов, так как не увеличивают норму функции.

2.4.6. Оценки погрешности интерполирования

Простейшую оценку снизу погрешности интерполирования мы получим с помощью третьего гиперболического параметра решётки.

ТЕОРЕМА 20. Для любой целочисленной решётки Λ найдется функция $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ такая, что справедлива оценка снизу погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \geq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda) + 1)^\alpha}. \quad (2.64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

ТЕОРЕМА 21. Для любой целочисленной решётки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (2.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [50]. \square

Если ввести оператор приближенного интерполирования $R_\Lambda[f]$ с помощью обобщённой параллелепипедальной сетки целочисленной решётки равенством $R_\Lambda[f] = f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))$, то справедлива оценка для нормы

$$\|R_\Lambda[f]\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right).$$

Теорема 21 можно обобщить на случай произвольного оператора интерполирования $I_{\Lambda,\vec{x}}$.

ТЕОРЕМА 22. Для любой целочисленной решётки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s относительно подрешётки Λ для любой функции $f(\vec{z}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda,\vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (2.66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки \mathbb{Z}^s , относительно подрешетки Λ имеем:

$$f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} c(\vec{m} + \vec{n}) \left(e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{z})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z})} e^{2\pi i(\vec{n}, \vec{x})} \right). \quad (2.67)$$

Отсюда следует, что

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{(m_1 + n_1 \dots m_s + n_s)^\alpha}. \quad (2.68)$$

Теперь воспользуемся включением $K(q_3(\Lambda)) \subset M_H^*(\Lambda)$. Правая часть (2.68) только увеличится, если суммирование провести по всем целым точкам, не попавшим в гиперболический крест $K(q_3(\Lambda))$. Получим

$$\|f(\vec{z}) - I_{\Lambda, \vec{x}}(f(\vec{z}))\|_C \leq 2\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda))} \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \quad (2.69)$$

Применяя к правой части (2.69) соотношения (2.28) и (2.36) при $t = q_3(\Lambda)$, получим утверждение теоремы. \square

2.5. Алгоритмы приближенного интегрирования и интерполирования с правилом останковки

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу приближенного интегрирования периодических функций многих переменных (см. также [49]). Известно, что для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left(\left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$, как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Более того, относительно параметра гладкости α для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ с правилом останковки $\Delta(f(\vec{x}))$, если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных N_j с $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$ и сеток с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ из N_j взвешенных узлов равномерно распределенных в единичном s -мерном кубе такая, что для правила останковки $\Delta(f(\vec{x})) < \varepsilon$ величина

$$\Delta(f(\vec{x})) = \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = 0. \quad (2.70)$$

В этом определении предполагается, что величина $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$ алгоритмически выражается через веса и значения функции в узлах сетки. Кроме того предполагается, что для любого N_j из данной последовательности сетка с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ алгоритмически вычисляется. В данной работе будет предложена в качестве правила остановки величины дискретной дисперсии и сеточного размаха, определение которых будет дано ниже. Таким образом, вычисление приближенного значения интеграла продолжается до тех пор, пока для заданного $\varepsilon > 0$ не будет выполнено правило остановки $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) < \varepsilon$.

Следуя К. И. Бабенко [42] и О. В. Локуциевскому [57], дадим следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ) , если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda-\alpha}}\right). \quad (2.71)$$

Как известно (см. [56]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

С точки зрения трудоемкости вычислений разумно выделить класс алгоритмов приближенного интегрирования, в которых j -ая квадратурная формула полностью использует результаты вычислений по $j-1$ -ой квадратурной формуле. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, если для любого $j \geq 1$ выполняются условия

$$M(j) \subset M(j+1), \quad \exists \rho : \forall \vec{x} \in M(j) : \rho_{j+1}(\vec{x}) = \rho \cdot \rho_j(\vec{x}). \quad (2.72)$$

Наиболее простой пример концентрических алгоритмов приближенного интегрирования дают квадратурные формулы с равными весами, построенными из первых членов бесконечной равномерно распределенной по модулю 1 бесконечной последовательности точек из единичного s -мерного куба. Другой класс концентрических алгоритмов приближенного интегрирования связан с понятием произведения сеток с весами.

Пусть даны две сетки с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$. Напомним определение произведения сеток с весами из работы [52], которое здесь несколько отличается для случая $|M_3| \neq |M_1| \cdot |M_2|$ появлением нормировочного множителя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. *Произведением двух сеток с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ называется третья сетка*

$$\langle M_3, \vec{\rho}_3 \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle, \quad (2.73)$$

где

$$M_3 = \{ \{ \vec{x} + \vec{y} \} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}, \quad (2.74)$$

$$\rho_3(\vec{z}) = \frac{|M_3|}{|M_1| \cdot |M_2|} \sum_{\substack{\vec{z} = \{ \vec{x} + \vec{y} \}, \\ \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \cdot \rho_2(\vec{y}), \quad (2.75)$$

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)$ дробной частью вектора называется вектор $\{ \vec{z} \} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Будем говорить, что задан мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования $\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью $\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$), если $M^*(1) = M(1)$, $\vec{\rho}^*(1) = \vec{\rho}(1)$ и для любого $j \geq 1$ выполняются условия*

$$\langle M^*(j+1), \vec{\rho}^*(j+1) \rangle = \langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j) \rangle \cdot \langle M(j+1), \vec{\rho}(j+1) \rangle. \quad (2.76)$$

Нетрудно видеть, что если для каждой сетки $\vec{0} \in M(j)$ ($j = 1, 2, \dots$), то мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования будет концентрическим, так как в этом случае всегда $M^*(j) \subset M^*(j+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования*

$$\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

с дополнительным условием

$$\vec{0} \in M(j) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

будем называть мультипликативным, концентрическим алгоритмом приближенного интегрирования.

Пусть величины m_f , M_f — минимальное и максимальное значение функции $f(\vec{x})$ определены, соответственно, равенствами

$$m_f = \min_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad M_f = \max_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad (2.77)$$

а размах функции $v_f = M_f - m_f$, тогда справедливо неравенство

$$v_f \leq \|f\|_{E_s^\alpha} 2((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1). \quad (2.78)$$

Очевидно, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) можно определить две числовые последовательности

$$m_f(j) = \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad M_f(j) = \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad (2.79)$$

для которых справедливы соотношения

$$m_f(j) \geq m_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} m_f(j) = m_f, \quad M_f(j) \leq M_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} M_f(j) = M_f. \quad (2.80)$$

Для любого концентрического алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) будут выполнены дополнительные соотношения монотонности:

$$\begin{aligned} m_f &\leq \dots \leq m_f(j) \leq \dots \leq m_f(2) \leq m_f(1) \leq \\ &\leq M_f(1) \leq M_f(2) \leq \dots \leq M_f(j) \leq \dots \leq M_f. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Так как для "сеточного" размаха $v_f(j) = M_f(j) - m_f(j)$ функции $f(\vec{x})$ отличной от константы выполняется равенство $\lim_{j \rightarrow \infty} v_f(j) = v_f > 0$, то величину сеточного размаха нельзя использовать как правило остановки, но в качестве правила остановки можно использовать величину приращения сеточного размаха $dv_f(j) = v_f(j) - v_f(j-1)$, которая стремится к нулю, но с оговоркой, что если приращение сеточного размаха нулевое, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Таким образом, простейшее правило остановки для концентрического алгоритма можно определить как

$$\begin{aligned} &\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = \\ &= \max \left(\frac{1}{|M(j)|}, \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) + \min_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \max_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) \right) \quad (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Всё выше изложенное перенесём на случай интерполяции периодических функций по узлам, образующим обобщённую параллелепипедальную сетку целочисленной решётки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интерполирования

$$\langle M(j), \Delta_I \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ с правилом остановки $\Delta_I(f(\vec{x}))$, если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных N_j с $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$

и обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток $M(j)$ из N_j узлов равномерно распределённых в единичном s -мерном кубе такая, что для правила остановки $\Delta_I(f(\vec{x})) < \varepsilon$ величина

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \Delta_I(f(\vec{x}), M(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_I(f(\vec{x}), M(j)) = 0. \quad (2.83)$$

Теперь можем дать новое определение ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Будем говорить, что алгоритм приближенного интерполирования $\langle M(j), \Delta_I \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ) , если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности интерполирования выполняется равенство

$$\|R_{\Lambda_j}[f(\vec{x})]\|_C = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot (\alpha - 1)}}\right). \quad (2.84)$$

Вопрос о типе ненасыщаемого алгоритма интерполирования с помощью обобщённых параллелепипедальных сеток целочисленных решёток остается открытым, так как в настоящее время нет оценок для третьего гиперболического параметра через детерминант решётки, а теорема 21 сформулирована в терминах третьего гиперболического параметра решётки.

Все определения с 15 по 18 преобразуются в соответствующие определения относительно интерполирования, если в них заменить слово интегрирование на интерполирование и удалить весовые функции.

Естественный вопрос, который возникает при рассмотрении мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интерполирования, это сходимость последовательности интерполирующих функций к интерполируемой в той или иной метрике. Этот вопрос рассмотрим в следующих разделах.

2.6. Вложенные последовательности параллелепипедальных сеток

Рассмотрим линейное сравнение

$$m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1).$$

Решётку решений этого сравнения обозначим через $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$. Её базисная матрица будет иметь вид

$$A(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{s-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисная матрица взаимной решётки будет иметь вид

$$A^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{a_1}{N} & \cdots & \frac{a_{s-1}}{N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая параллелепипедальная сетка задается равенством

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

Каждая параллелепипедальная сетка обладает важным свойством, что её проекция на любую координатную ось будет множеством точек $\left\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right\}$.

Очевидно, что если $b_j \equiv a_j \pmod{N}$ ($j = 1, \dots, s-1$), то

$$\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) = \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N),$$

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N)).$$

Кроме этого, отметим, что для любого целого c взаимно простого с N справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) &= \Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N), \quad M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \\ &= M(\Lambda(c, ca_1, \dots, ca_{s-1}; N)). \end{aligned}$$

Нетрудно, указать полную систему вычетов фундаментальной решётки \mathbb{Z}^s по целочисленной подрешётке $\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; N)$. А именно, такой полной системой вычетов будет множество

$$M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Аналогичные полные системы вычетов $M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ можно выписать для любой координаты $j = 2, \dots, s$, если j -ая координата изменяется от 0 до $N-1$, а все остальные координаты нулевые.

Заметим, что указанные полные системы вычетов в некотором смысле самые плохие, так как для них третий гиперболический параметр $q_3(M_j^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))) = 0$. Действительно, точка $(0, 1, 0, \dots, 0)$ имеет единичную усеченную норму, но не принадлежит полной системе вычетов $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$.

Рассмотрим периодическую функцию $f(\vec{x}) = e^{2\pi i x_2}$. Для любой точки $\vec{x} = \left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)$ параллелепипедальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ имеем равенство

$$f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}},$$

а интерполяционный многочлен будет иметь вид $f_1(\vec{x}) = e^{2\pi i a_1 x_1}$ и для каждой точки $\vec{x} = \left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right)$ параллелепипедальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ имеем равенство

$$f_1\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{N}\right\}\right) = e^{2\pi i \frac{a_1 k}{N}}.$$

Очевидно, что интерполяционный многочлен $f_1(\vec{x})$ не сходится к интерполируемой функции $f(\vec{x})$ ни при каком N . Этот пример показывает, что выбор полной системы вычетов для построения интерполяционного многочлена играет принципиальную роль. Будем для краткости писать Λ вместо $\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ и $M_1^*(\Lambda)$ вместо $M_1^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$. В новых обозначениях равенства (2.44) и (2.45) примут следующий парадоксальный вид:

$$S_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)} \left(\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) \right) = \sum_{m=0}^{N-1} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) e^{2\pi i \frac{mk}{N}}, \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} c_{M(\Lambda), M_1^*(\Lambda)}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c((m, 0, \dots, 0) + \vec{n}). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Объяснить данный парадокс достаточно просто, если рассмотреть функцию одной переменной:

$$f_1 \left(\frac{k}{N} \right) = f \left(\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) \right).$$

Воспользуемся рядом Фурье для периодической функции $f(\vec{x})$, получим

$$f_1 \left(\frac{k}{N} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{N}},$$

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1 \left(\frac{k}{N} \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\left(\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \right) \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m)k}{N}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{n}) \delta_N(n_1 + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s - m) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{n} + (m, 0, \dots, 0)). \end{aligned}$$

Анализ формул (2.44) и (2.45) приводит к одному важному свойству коэффициентов интерполяционного многочлена. Эти коэффициенты с точностью до перестановки не зависят от полной системы вычетов, по которой строится интерполяционный многочлен.

Если мы имеем две целые точки \vec{n} и \vec{m} , то легко определить, когда $\vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}$. Для этого достаточно вычислить величину $\delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m})$, которая задается равенством

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) &= \frac{1}{N} + \left\{ \frac{(n_1 - m_1 - 1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{(n_1 - m_1) + a_1(n_2 - m_2) + \dots + a_{s-1}(n_s - m_s)}{N} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{n} \equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}, \\ 0 & \text{при } \vec{n} \not\equiv \vec{m} \pmod{\Lambda}. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим через $M_N(b)$ абсолютно наименьшее решение сравнения $x + b \equiv 0 \pmod{N}$. Нетрудно видеть, что

$$M_N(b) = \begin{cases} N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} \leq \frac{1}{2}, \\ N \left\{ -\frac{b}{N} \right\} - N & \text{при } \left\{ -\frac{b}{N} \right\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $(n_1, \dots, n_s) \equiv (m, 0, \dots, 0) \pmod{\Lambda}$ и n_2, \dots, n_s фиксированные, то наименьшее значение $\bar{n}_1 \dots \bar{n}_s$ достигается при $n_1 = M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s)$. Таким образом, возникает неоднородная задача минимизации выражения

$$\overline{M_N(-m + a_1 n_2 + \dots + a_{s-1} n_s)} \cdot \bar{n}_2 \dots \bar{n}_s \rightarrow \min$$

по всем целым n_2, \dots, n_s . Если для каждого целого значения m из промежутка $-\frac{N}{2} < m \leq \frac{N}{2}$ будет найден оптимальный набор n_2, \dots, n_s , то тем самым будет найдена абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$.

Пусть $N = N_1 \cdot N_2$ и $(N_1, N_2) = 1$, тогда справедливо равенство для решёток и сеток

$$\begin{aligned} \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2), \\ M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2)). \end{aligned}$$

Остановимся более подробно на последнем равенстве о произведении сеток. Оно вытекает из равенства

$$\begin{aligned} &\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) = \\ &= \left\{ \left(\frac{k_1}{N_1}, \left\{ \frac{a_1 k_1}{N_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k_1}{N_1} \right\} \right) + \left(\frac{k_2}{N_2}, \left\{ \frac{a_1 k_2}{N_2} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k_2}{N_2} \right\} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$k = N \left\{ \frac{k_1}{N_1} + \frac{k_2}{N_2} \right\}.$$

Верно и обратное утверждение, если $N = N_1 \cdot N_2$, $(N_1, N_2) = 1$ и

$$b_j \equiv a_j \pmod{N_1}, \quad c_j \equiv a_j \pmod{N_2} \quad (j = 1, \dots, s-1),$$

то

$$\begin{aligned} \Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1) \cap \Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2) &= \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N), \\ M(\Lambda(1, b_1, \dots, b_{s-1}; N_1)) \cdot M(\Lambda(1, c_1, \dots, c_{s-1}; N_2)) &= M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)). \end{aligned}$$

Пусть для определенности $N_1 > N_2$. Нетрудно видеть, что параллелепipedальная сетка $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N))$ представима как объединение сдвинутых обобщенных параллелепipedальных сеток $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x})$, когда \vec{x} пробегает все точки параллелепipedальной сетки $M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))$:

$$M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_2))} M(\Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_1), \vec{x}).$$

Для простоты записи положим $\Lambda = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N)$, $\Lambda_\nu = \Lambda(1, a_1, \dots, a_{s-1}; N_\nu)$ ($\nu = 1, 2$). В новых обозначениях получим $M(\Lambda) = \bigcup_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} M(\Lambda_1, \vec{x})$. Для каждого $\vec{x} \in M(\Lambda_2)$ определим функцию $f_{\vec{x}}(\vec{z})$ равенствами

$$f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \begin{cases} f(\vec{z}) & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda_1, \vec{x}), \\ 0 & \text{при } \vec{z} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x}). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для любой точки \vec{z} из параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство

$$f(\vec{z}) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda_2)} f_{\vec{x}}(\vec{z}).$$

Так как функции $f(\vec{z})$ и $f_{\vec{x}}(\vec{z})$ ($\vec{x} \in M(\Lambda_2)$) определены на сетке $M(\Lambda)$, то для них можно рассмотреть интерполяционные многочлены $I_{\Lambda}f(\vec{z})$, $I_{\Lambda}f_{\vec{x}}(\vec{z})$ и $I_{\Lambda_1, \vec{x}}f(\vec{z})$.

Согласно формулам (2.48) и (2.49) получим:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \\ I_{\Lambda}f_{\vec{x}}(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) = \\ &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right), \\ I_{\Lambda_1, \vec{x}}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda}f_{\vec{x}}(\vec{z}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right), \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1, \vec{x}}f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda) \setminus M(\Lambda_1, \vec{x})} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} \right) + \\ &+ \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda_1)} f(\vec{x} + \vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{y})} - \frac{1}{N_1} \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y})} \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

ЛЕММА 22. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^{α} и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (2.89)$$

справедливо равенство

$$I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z}) = \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \quad (2.90)$$

и оценка для нормы разности

$$\|I_{\Lambda}f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1}f(\vec{z})\|_C \leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^{\alpha}}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right). \quad (2.91)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, подставляя ряд Фурье (2.89) в равенство (2.88), получим:

$$\begin{aligned}
I_\Lambda f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1} f(\vec{z}) &= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} - \\
&\quad - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} = \\
&= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^s} C(\vec{n}) \left(\sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_\Lambda(\vec{n} - \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \delta_{\Lambda_1}(\vec{n} - \vec{m}) \right) = \\
&\quad = \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) + \\
&\quad + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \left(\sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1} C(\vec{n} + \vec{m}) \right) = \\
&= \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}) - \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} e^{2\pi i(\vec{z}, \vec{m})} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} C(\vec{n} + \vec{m}).
\end{aligned}$$

Переходя к оценкам по модулю, получим

$$\begin{aligned}
\|I_\Lambda f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1} f(\vec{z})\|_C &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(\sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda) \setminus M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\vec{m} \in M_H^*(\Lambda_1)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_1 \setminus \Lambda} \frac{1}{(\overline{m_1 + n_1} \dots \overline{m_s + n_s})^\alpha} \right) \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda_1))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \leq \\
&\leq \frac{\|f(\vec{z})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda_1))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda_1))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda_1))) \right).
\end{aligned}$$

□

Из доказанной леммы следует, что в качестве правила остановки концентрического алгоритма приближенного интерполирования периодических функций можно взять величину

$$\Delta_I(f(\vec{x})) = \max_{\vec{z} \in M(\Lambda)} |I_\Lambda f(\vec{z}) - I_{\Lambda_1} f(\vec{z})|,$$

которая стремится к нулю при стремлении величины третьего гиперболического параметра к бесконечности.

Глава 3

Разработка программного обеспечения численного интегрирования и интерполирования

3.1. Библиотека численного интегрирования `MathAlgo.Integration`

Для вычисления интегралов можно использовать квадратурные формулы по параллелепipedальным сеткам Коробова, впервые предложенные в работе [61].

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{k}{N}\right) + R1_N(g). \quad (3.1)$$

В рамках развития библиотеки алгоритмов, опубликованной на ПОИВС ТМК, было реализовано несколько алгоритмов численного интегрирования на языке C#. Язык программирования высокого уровня C# сочетает в себе высокую производительность, поддержку арифметики высокой точности и кроссплатформенность. Библиотека алгоритмов, а также все результаты численных экспериментов опубликованы в ПОИВС ТМК [62].

К особенностям программной реализации можно отнести:

- Реализована на кроссплатформенной платформе **.NET Core**.
- Поддерживаются типы длины 64, 96, 128 и 256 бит.
- Поддерживается многопоточность.

Базовой структурой сетки является интерфейс `IGrid`, предоставляющий доступ к перечислению всех точек, необходимых для проведения процесса интегрирования. Создание этого интерфейса позволяет использовать различные сетки в рамках одного алгоритма интегрирования и наоборот - различные алгоритмы интегрирования с одной сеткой.


```
public interface IGrid
{
    int Dimension { get; }
    long PointsCount { get; }
    IEnumerable<decimal[]> Points { get; }
}
```

Algorithm 1: Интерфейс IGrid

Реализованы теоретико-числовые сетки произвольной размерности

- параллелепипедальные;
- неравномерные;
- двумерные сетки Смоляка.

Простейшую периодизацию двумерной функции по одной переменной можно производить с помощью способа, указанного в работе [60]. Для этого введем вспомогательную функцию:

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & 0 \leq y \leq 1 \\ f_1(x, 2 - y), & 1 < y \leq 2 \end{cases}, \quad 2 \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 f_2(x, y) dx dy.$$

Рассмотрим квадратурную формулу по растянутой параллелепипедальной сетке:

$$\int_0^1 \int_0^2 g(x, y) dx dy = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R_{2N}(g). \quad (3.2)$$

Применяя к функции f_2 , получаем периодизированную по одной переменной квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 f_2(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_2\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + R_{2N}(f_2) = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} f_1\left(\left\{\frac{a \cdot k}{N}\right\}, 2 - \frac{2k}{N}\right) \right) + R_{2N}(f_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эта периодизация реализована в классе `PeriodisedIntegration2D`.

```

public class ParallelepipedalGrid : IGrid
{
    private readonly long[] _a;
    private readonly long _p;
    private readonly int _s;

    public ParallelepipedalGrid(long p, params long[] a)
    {
        _a = new [] { 1L }.Concat(a).ToArray();
        _p = p;
        _s = _a.Length;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => _p;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            long[] ai = Enumerable.Repeat(0L, _s).ToArray();
            decimal[] bi = new decimal[_s];
            for (long i = 0; i < _p; i++)
            {
                for (int j = 0; j < _s; j++)
                {
                    ai[j] += _a[j];
                    if (ai[j] >= _p)
                        ai[j] -= _p;

                    bi[j] = (decimal)ai[j] / _p;
                }

                yield return bi;
            }
        }
    }
}

```

Algorithm 2: Реализация параллелепипедальной сетки ParallelepipedalGrid

```

public class UnevenGrid : IGrid
{
    private readonly long _p;
    private readonly int _s;

    public UnevenGrid(long p, int s)
    {
        _p = p;
        _s = s;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => _p;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            decimal[] bi = new decimal[_s];
            for (long i = 1; i <= _p; i++)
            {
                long k = i;
                for (int j = 0; j < _s; j++)
                {
                    k = (k * i) % _p;
                    bi[j] = (decimal) k / _p;
                }

                yield return bi;
            }
        }
    }
}

```

Algorithm 3: Реализация неравномерной сетки UnevenGrid

```

public class SmolyakSubGrid2D : IGrid
{
    private readonly int _q;
    private readonly int _s;

    public SmolyakSubGrid2D(int q, int s)
    {
        _q = q;
        _s = s;
    }

    public int Dimension => _s;

    public long PointsCount => 1;

    public IEnumerable<decimal[]> Points
    {
        get
        {
            long c_k_s1 = 1;
            long[] ai = Enumerable.Repeat(0L, _s).ToArray();
            decimal[] bi = new decimal[_s];

            foreach (var vs in GenerateC())
            {
                var _2vs0 = Helpers.Pow(2, vs[0]);
                var _2vs1 = Helpers.Pow(2, vs[1]);

                for (var k0 = 0; k0 < _2vs0; k0++)
                {
                    for (var k1 = 0; k1 < _2vs1; k1++)
                    {
                        bi[0] = (decimal)k0 / _2vs0;
                        bi[1] = (decimal)k1 / _2vs1;
                        yield return bi;
                    }
                }
            }
        }
    }

    private IEnumerable<int[]> GenerateC()
    {
        for (var i = 1; i < _q; i++)
        {
            yield return new[] { i, _q - i };
        }
    }
}

```

```

public class PeriodisedIntegration2D
{
    private readonly IGrid _grid;
    private readonly long _p;
    private readonly long _p2;

    public PeriodisedIntegration2D(IGrid grid)
    {
        _grid = grid;
        _p = grid.PointsCount;
        _p2 = _p / 2 + 1;
    }

    public decimal Integrate(Func<decimal, decimal, decimal> f)
    {
        return Integrate(xs => f(xs[0], xs[1]));
    }

    public decimal Integrate(Func<decimal[], decimal> f)
    {
        decimal res = 0;
        long i = 0;
        foreach (var bi in _grid.Points)
        {
            bi[1] = i++ < _p2 ? bi[1] : 2m - bi[1];
            res += f(bi);
        }

        res /= _p;
        return res;
    }
}

```

Algorithm 5: класс PeriodisedIntegration2D

Качество параллелепипедальных сеток оценивается либо через гиперболический параметр решётки $\Lambda(a, N)$ линейного сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod{N}$

$$q(\Lambda(a, N)) = \min(\overline{m}_1, \overline{m}_2), \quad \overline{x} = \max\{1, x\}, \quad (3.4)$$

либо через суммы Быковского

$$S(B(\Lambda(a, N)), \alpha) = \sum_{(x_1, x_2) \in B(\Lambda(a, N))} \frac{1}{(\overline{x}_1 \overline{x}_2)^\alpha} \quad (3.5)$$

где α — параметр гладкости, $B(\Lambda(a, N))$ — множество относительных минимумов решётки $\Lambda(a, N)$,

В работе [63] изложен алгоритм гиперболический параметр решётки через построение множества Быковского. Он реализован в функции `CalcHyperbolicParameter`, которая использует классы, реализующие множество Быковского `ContinuedFraction` и цепную дробь `ContinuedFraction`.

```
public static long CalcHyperbolicParameter(long n, long a)
{
    var gp = Math.Max(Math.Min(a, n - a), 1L);
    var bs = new BykovskySet(new ContinuedFraction(a, n)).Points;
    for (var i = 0; i < bs.Length - 1; i++)
    {
        var gp1 = Math.Abs(bs[i][0]) * bs[i][1];
        if (gp1 < gp)
        {
            gp = gp1;
        }
    }

    return gp;
}
```

Algorithm 6: Реализация вычисления гиперболического параметра решётки `CalcHyperbolicParameter`

```

public class BykovskySet
{
    public long[][] Points { get; }

    public BykovskySet(ContinuedFraction fraction)
    {
        var t = new long[fraction.A.Count + 2];
        t[0] = 0;
        t[1] = 1;
        for (var i = 2; i < fraction.A.Count + 2; i++)
        {
            t[i] = fraction.A[fraction.A.Count + 1 - i] * t[i - 1]
                + t[i - 2];
        }

        Points = new long[fraction.A.Count][];
        var e = 1;
        for (var i = 0; i < Points.Length; i++)
        {
            Points[i] = new[] {e * t[Points.Length - i - 1],
                fraction.Q[i]};
            e *= -1;
        }
    }
}

```

Algorithm 7: Реализация множества Быковского BykovskySet


```

public class ContinuedFraction
{
    public List<long> A { get; } = new List<long>();
    public List<long> P { get; } = new List<long>();
    public List<long> Q { get; } = new List<long>();

    public ContinuedFraction(long a, long b)
    {
        long r = 1, t, p1 = 0, p2 = 1, q1 = 1, q2 = 0;
        while (r > 0)
        {
            var x = a / b;

            A.Add(x);

            r = a - x * b;
            a = b;
            b = r;

            t = p2;
            p2 = p2 * x + p1;
            p1 = t;

            t = q2;
            q2 = q2 * x + q1;
            q1 = t;

            P.Add(p2);
            Q.Add(q2);
        }
    }
}

```

Algorithm 8: Реализация цепной дроби ContinuedFraction

3.2. О сведении многомерной Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетки к одномерной и быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим решётку $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}.$$

Для нее рассмотрим взаимную решётку

$$\Lambda^*(\vec{a}, N) = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Параллелепипедальной сеткой будет пересечение взаимной решётки с единичным s -мерным кубом

$$M(\vec{a}, N) = \Lambda^*(\vec{a}, N) \cap G_s, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Таким образом, параллелепипедальная сетка $M(\vec{a}, N)$ состоит из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Подробнее о параллелепипедальных сетках смотрите [56].

В соответствии с работами [44], [50] рассмотрим $\mathbb{Z}^s / \Lambda(\vec{a}, N)$. Взяв по одному представителю из каждого класса, получаем полную систему вычетов $M^*(\Lambda)$.

Пронумеруем полную систему вычетов

$$M^{**}(\Lambda) = \{\vec{m}_t \mid \vec{m}_t \in M^*(\Lambda), t \equiv m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \pmod{N}, 0 \leq t < N\}.$$

В соответствии с работой [64] сформулируем теорему, позволяющую перейти к одномерной Фурье интерполяции.

Теорема о сведении многомерной Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетки к одномерной

Для интерполяционного многочлена функции $f(\vec{x})$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M^{**}(\Lambda)$

$$S_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}_t \in M^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) e^{2\pi i(\vec{m}_t, \vec{x})}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_t, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s)k}{N}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

справедливо равенство коэффициентов Фурье с одномерным интерполяционным многочленом для функции $f^*(x) = f(x, \{a_2 x\}, \dots, \{a_s x\})$ по равномерной сетке на отрезке $[0, 1]$:

$$S(f^*(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}, \quad (3.8)$$

где

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^* \left(\frac{j}{N} \right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}, \quad (3.9)$$

$$c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) = c_t.$$

Доказательство.

Рассмотрим полную пронумерованную систему вычетов

$$M_1^{**}(\Lambda) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Интерполяционный многочлен функции $f(x)$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ будет

$$\begin{aligned} S_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m}_{1,t} \in M_1^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) e^{2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) e^{2\pi i k x_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,k}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^* \left(\frac{j}{N} \right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}. \end{aligned}$$

Легко заметить, что системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ и $M^{**}(\Lambda)$ различаются на сдвиг по решётке Λ , а значит и коэффициенты Фурье при соответствующих гармониках совпадают. Действительно,

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) e^{-2\pi i \frac{t}{N} k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s) k}{N}} = \\ &= c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t). \end{aligned}$$

Тем самым теорема доказана.

Задача интерполяции сводится к получению коэффициентов тригонометрического многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}$$

в точках $x_j = \frac{j}{N}, j = 0 \dots N-1$. Одним из эффективных способов получения коэффициентов c_k является алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

Как известно [65], дискретным преобразованием Фурье называется вычисление значений многочлена в комплексных корнях из единицы:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

а обратным дискретным преобразованием Фурье называется, операция – интерполяция коэффициентов по значениям y_j

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{kj}{N}},$$

Известно, что с помощью схему Кули-Тьюки [65], для составного $N = \prod_{i=1}^n p_i$, можно получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O\left(N \sum_{i=1}^n p_i\right)$ операций.

В работах [66, 67, 68] были предложены алгоритмы построения оптимальных коэффициентов для $N = 2^n$. При использование таких коэффициентов, можно достичь асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

Для произвольного N использование схемы Радера [69] для простых p_i , также позволяет получить асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

Глава 4

Обобщенное преобразование Ганкеля и обобщенное преобразование Фурье

4.1. Некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$

Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$d_{n,\alpha} = \max_{[-1,1]} |P_n^{(\alpha)}(t)|. \quad (4.1)$$

При $\alpha \geq -1/2$, $d_{n,\alpha} = 1$ (см. [72]). С многочленами Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$, ортогональными с весом $(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$ (см. [76, Чап. X, 10.9]), многочлены $P_n^{(\alpha)}(t)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{\lambda} C_n^\lambda(t) = \frac{2\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda + 1)} P_n^{(\lambda-1/2)}(t), \quad \lambda > -1/2. \quad (4.2)$$

Пусть $\lambda > -1/2$, $dm_\lambda(t) = c_\lambda(1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1, 1]$,

$$c_\lambda^{-1} = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\lambda-1/2} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda + 1)}. \quad (4.3)$$

Приведем некоторые свойства преобразования $\mathcal{F}_{r,\lambda}$, вытекающие из [70, 72, 73].

Обозначим $\|e_{r,\lambda}(xy)\|_\infty = M_{r,\lambda}$. При $\lambda > -1/2$ для $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ справедливо представление

$$e_{r,\lambda}(xy) = \int_{-1}^1 (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)) e^{-ixyt} dm_\lambda(t). \quad (4.4)$$

Из (4.1)–(4.4) вытекают оценки

$$M_{r,\lambda} \leq 1 + d_{2r,\lambda-1/2}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0; \quad M_{r,\lambda} = 1, \quad \lambda \geq 0.$$

Преобразование $\mathcal{F}_{r,\lambda}$ — унитарный оператор, $\mathcal{F}_{r,\lambda}(e^{-|\cdot|^2/2})(y) = e^{-|y|^2/2}$, и для $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$(\mathcal{F}_{r,\lambda}(f), \mathcal{F}_{r,\lambda}(g)) = (f, g),$$

где

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\nu_{\lambda}(x).$$

Обратный оператор имеет вид

$$(\mathcal{F}_{r,\lambda})^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(y).$$

Равенство

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_{\lambda}(y)$$

справедливо не только в $L^2(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$, но и поточечно, если f принадлежит классу

$$\mathcal{A} = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f, \mathcal{F}_{r,\lambda}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})\}.$$

Неравенство Хаусдорфа–Юнга имеет вид

$$\|\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)\|_{p', d\nu_{\lambda}} \leq M_{r,\lambda}^{\frac{2}{p}-1} \|f\|_{p, d\nu_{\lambda}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Укажем дифференциально-разностный оператор, для которого ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ является собственной функцией. Пусть

$$\Delta_{\lambda}f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda + 1}{x} f'(x) - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2}$$

— лапласиан Данкля [71],

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\lambda}f(x) &= \Delta_{\lambda}f(x) - (2r - 1) \left(\lambda + r + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2} \\ &= f''(x) + \frac{2\lambda + 1}{x} f'(x) - 2r(r + \lambda) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\Delta_{r,\lambda}$ получен из оператора $\delta_{k,a}f(x) = |x|^{2-a} \Delta_k f(x)$ при $a = \frac{1}{r}$, $k = \lambda + 1/2$.

ЗАДАЧА. Если $D_{\lambda}f(x) = f'(x) + (\lambda + 1/2)(f(x) - f(-x))/x$, то $D_{\lambda}^2 f = \Delta_{\lambda}f$. Для какого оператора $D_{r,\lambda}f$, $D_{r,\lambda}^2 f = \Delta_{r,\lambda}f$? Существование оператора $D_{r,\lambda}f$ основано на том, что для операторов $A = \Delta_{\lambda}, \Delta_{r,\lambda}$ и подходящих функций квадратичная форма $(Af, f) \leq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы равенства*

$$(\Delta_{r,\lambda})_x e_{r,\lambda}(xy) = -y^2 e_{r,\lambda}(xy), \quad \Delta_{r,\lambda}(x^{2r} \operatorname{sign} x) = 0. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро $e_{r,\lambda}(xy)$ запишем в виде

$$e_{r,\lambda}(xy) = f_1(x) + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda + 1)_{2r}} y^{2r} \operatorname{sign} y f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = j_{\lambda}(xy), \quad f_2(x) = x^{2r} \operatorname{sign} x j_{\lambda+2r}(xy).$$

Нужно показать, что

$$\Delta_{r,\lambda}f_1(x) = -y^2 f_1(x), \quad \Delta_{r,\lambda}f_2(x) = -y^2 f_2(x). \quad (4.7)$$

Так как ядро $j_\lambda(xy)$ является собственной функцией оператора Бесселя

$$B_\lambda f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda + 1}{x} f'(x)$$

(см., например, [77]), то равенство $\Delta_{r,\lambda} f_1(x) = -y^2 f_1(x)$ выполнено.

Воспользовавшись формулами

$$j'_\lambda(x) = -\frac{x}{2(\lambda + 1)} j_{\lambda+1}(x),$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda + 1)(\lambda + 2)} j_{\lambda+2}(x) = j_{\lambda+1}(x) - j_\lambda(x)$$

[72, 77], получим

$$\begin{aligned} f'_2(x) &= 2r|x|^{2r-1} j_{\lambda+2r}(xy) - \frac{1}{2(\lambda + 2r + 1)} |x|^{2r+1} y^2 j_{\lambda+2r+1}(xy), \\ f''_2(x) &= 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign}x j_{\lambda+r}(xy) - \frac{(4r + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy) \\ &+ \frac{(xy)^2}{4(\lambda + 2r + 1)(\lambda + 2r + 2)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r+2}(xy) = 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign}x j_{\lambda+r}(xy) \\ &- \frac{(4r + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy) + y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x (j_{\lambda+2r+1}(xy) - j_{\lambda+2r}(xy)) \\ &= 2r(2r - 1)x^{2r-2} \operatorname{sign}x j_{\lambda+r}(xy) + \frac{(2\lambda + 1)}{2(\lambda + 2r + 1)} y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r+1}(xy) \\ &- y^2 x^{2r} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r}(xy), \quad \frac{f_2(x) - f_2(-x)}{x^2} = 2x^{2r-2} \operatorname{sign}x j_{\lambda+2r}(xy). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.5) вытекает (4.7) для f_2 . Первое равенство в (4.2) получено. Второе равенство в (4.6) получается из (4.7) для f_2 при $y = 0$. Предложение 1 доказано.

Пусть для $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = \{f(x) = F_1(x) + x^{2r} \operatorname{sign}x F_2(x): F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), F_1, F_2 - \text{четные}\}. \quad (4.8)$$

Отметим, что $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ плотно в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p < \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)$, $\Delta_{r,\lambda} f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то согласно (8), (9), (4.8)

$$\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x) + \frac{(-1)^r y^{2r} \operatorname{sign}y}{2^{2r}(\lambda + 1)_{2r}} \int_{\mathbb{R}} x^{4r} F_2(x) j_{\lambda+2r}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}} F_1(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x), \int_{\mathbb{R}} x^{4r} F_2(x) j_{\lambda+2r}(xy) d\nu_\lambda(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(см. [71]), то $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

Далее, применяя (4.6), (4.8), получим

$$\Delta_{\lambda,r} f(x) = F_1''(x) + (2\lambda + 1) \frac{F_1'(x)}{x} + x^{2r} \operatorname{sign}x \left(F_2''(x) + (4r + 2\lambda + 1) \frac{F_2'(x)}{x} \right)$$

$$+F_2(x)\Delta_{\lambda,r}(x^{2r}\operatorname{sign}x) = G_1(x) + x^{2r}\operatorname{sign}x G_2(x),$$

где

$$G_1(x) = F_1''(x) + (2\lambda + 1)\frac{F_1'(x)}{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad G_2(x) = F_2''(x) + (4r + 2\lambda + 1)\frac{F_2'(x)}{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

и $G_1(x), G_2(x)$ — четные функции. Следовательно, $\Delta_{\lambda,r}f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Теорема 1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_{\lambda,r}^n f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x) = (-1)^n y^{2n} \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ предложение 2 доказывается как равенство (6.7) в [72], опираясь на теорему 5.6 из [70]. Для $n > 1$ предложение 2 вытекает из теоремы 1.

4.2. Операторы обобщенного сдвига

При построении операторов обобщенного сдвига будем следовать работам [73, 74]. Для $x, y \in \mathbb{R}$ рассмотрим два оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) \quad (4.9)$$

и

$$T^y f(x) = \frac{\tau^y f(x) + \tau^{-y} f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z). \quad (4.10)$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ для них справедливы оценки

$$\|\tau^y f\|_{2,d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda} \|f\|_{2,d\nu_\lambda}, \quad \|T^y f\|_{2,d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{2,d\nu_\lambda}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Получим для операторов (4.9), (4.10) интегральные представления. Напомним теорему сложения Гегенбауэра для нормированной функции Бесселя [78, Чаp. XI, 11.4]:

$$j_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \lambda}{\lambda} \frac{x^k}{2^k(\lambda + 1)_k} j_{\lambda+k}(x) \frac{y^k}{2^k(\lambda + 1)_k} j_{\lambda+k}(y) C_k^\lambda(t),$$

где $\lambda > -1/2$, $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|t| \leq 1$.

Используя ортогональность многочленов Гегенбауэра, из теоремы сложения легко получаются следующие теоремы умножения Гегенбауэра [78, Чаp. XI, 11.41]:

$$j_\lambda(xz) j_\lambda(yz) = \int_{-1}^1 j_\lambda(Az) dm_\lambda(t), \quad (4.11)$$

$$\frac{(xz)^{2r} j_{\lambda+2r}(xz) (yz)^{2r} j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda + 1)_{2r}} = \int_{-1}^1 j_\lambda(Az) P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t) dm_\lambda(t). \quad (4.12)$$

Использование многочлена $P_{2r}^{(\lambda-1/2)}(t)$ в (4.12) дает более компактную форму записи.

Новая теорема умножения [75], записанная нами с использованием многочленов Генбауэра $P_n^{(\lambda-1/2)}(x)$, имеет вид:

$$(xz)^{2r} j_{\lambda+2r}(xz) j_{\lambda}(yz) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+2r}(Az) (Az)^{2r} P_{2r}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) dm_{\lambda}(t). \quad (4.13)$$

Левые части (4.11)–(4.13) являются четными по x, y . Правые части также четным образом зависят от x, y . В этом можно убедиться, делая в интегралах замены переменных $t \rightarrow -t; x \rightarrow -x, t \rightarrow -t; y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$. Следовательно, равенства (4.11)–(4.13) справедливы при $x, y \in \mathbb{R}$.

Ввиду важности теоремы умножения (4.13) в приложении для нее приводится более простое чем в [75] доказательство.

Если $f_e(x), f_o(x)$ — четная и нечетная составляющие функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то применяя (9), (4.11)–(4.13) и используя для краткости обозначение $\lambda_0 = \lambda - 1/2$, получим

$$\begin{aligned} e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz) &= j_{\lambda}(xz)j_{\lambda}(yz) \\ &+ \frac{(-1)^r}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \left\{ (xz)^{2r} \text{sign}(xz) j_{\lambda+2r}(xz) j_{\lambda}(yz) + (yz)^{2r} \text{sign}(yz) j_{\lambda+2r}(yz) j_{\lambda}(xz) \right\} \\ &+ \frac{(xz)^{2r} \text{sign} x j_{\lambda+2r}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \frac{(yz)^{2r} \text{sign} y j_{\lambda+2r}(yz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ (e_{r,\lambda}(Az))_e (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) \right. \\ &\quad \left. + (e_{r,\lambda}(Az))_o \left(\text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) + \text{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) \left(1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) + \text{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) + e_{r,\lambda}(-Az) \left(1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) - \text{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} j_{\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz) &= j_{\lambda}(xz)j_{\lambda}(yz) + \frac{(-1)^r (xz)^{2r} \text{sign}(xz)}{2^{2r}(\lambda+1)_{2r}} j_{\lambda+2r}(xz)j_{\lambda}(yz) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) + e_{r,\lambda}(-Az) \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right\} dm_{\lambda}(t). \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ e_{r,\lambda}(Az) \left(1 + \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + e_{r,\lambda}(-Az) \left(1 - \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) \right) \right\} dm_{\lambda}(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отметим, что при $|t| \leq 1$

$$1 - \frac{(x-yt)^2}{A^2} = \frac{(1-t^2)y^2}{A^2} \geq 0, \quad \frac{|x-yt|}{A} \leq 1. \quad (4.16)$$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Опираясь на (4.14) и (4.15), определим два линейных оператора

$$\begin{aligned} \tau_1^y f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left(1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x-yt}{A} \right) + \operatorname{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{y-xt}{A} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + f(-A) \left(1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x-yt}{A} \right) - \operatorname{sign} y P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{y-xt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$\begin{aligned} T_1^y f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left(1 + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x-yt}{A} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + f(-A) \left(1 - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x-yt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

На подпространстве четных функций

$$\tau_1^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) (1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t). \quad (4.19)$$

Оператор (4.17) навеян соответствующим оператором в работах [79, 80]. Из (4.18) и (4.19) вытекает, что оператор τ_1^y на четных функциях и оператор T_1^y при $\lambda \geq 0$ положительные и $T_1^{-y} = T_1^y$ при $\lambda > -1/2$.

Для оценки L^p -норм операторов (4.17)–(4.19) определим некоторые вспомогательные операторы.

Пусть функция $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ – четная и измеримая по Борелю, функция $\psi(x, y):$

$:\mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ – нечетная по x , функция $\varphi(t, x, y): [-1, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ и $g(\varphi(-t, -x, y)) =$

$= g(\varphi(-t, x, -y)) = g(\varphi(t, x, y))$, функции ψ, φ – измеримые по Лебегу, и линейные операторы T_g^y, \tilde{T}_g^y , определены равенствами

$$\begin{aligned} T_g^y f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) (1 + \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) \right. \\ &\quad \left. + f(-A) (1 - \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) \right\} dm_\lambda(t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\tilde{T}_g^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) (1 + \psi(x, y) g(\varphi(t, x, y))) dm_\lambda(t). \quad (4.21)$$

ЛЕММА 1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}$ операторы $T_g^y f(x), \tilde{T}_g^y f(x)$ положительные. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\|T_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}, \quad (4.22)$$

если дополнительно $\int_{-1}^1 g(\varphi(t, x, y)) dm_\lambda(t) = 0$ для всех x, y , то

$$\|\tilde{T}_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}. \quad (4.23)$$

Если функция $\psi(x, y)$ четная по y , то и операторы T_g^y, \tilde{T}_g^y четные по y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \geq 0$, то $T_g^y f(x) \geq 0$, $\tilde{T}_g^y f(x) \geq 0$.
Если $p = \infty$, то согласно (4.20)

$$\begin{aligned} \|T_g^y f\|_\infty &\leq \frac{1}{2} \sup_x \int_{-1}^1 \{ (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t) \|f\|_\infty = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\tilde{T}_g^y f$ при дополнительном условии, что среднее значение функции $g(\varphi(t, x, y))$ по t равно нулю.

Если $p = 1$, то делая замены $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$, и учитывая свойства функций A , g , ψ , φ , получим

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} |T_g^y f(x)| d\nu_\lambda(x) &\leq \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A)|(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ |f(-A)|(1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \\ &+ \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A)|(1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \\ &+ |f(-A)|(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A)| + |f(-A)| \} dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |f(A)| dm_\lambda(t) d\nu_\lambda(x) \leq \int_0^\infty |f(x)| d\nu_\lambda(x)$$

(см., например, [81]), то

$$\|T_g^y f\|_{1, d\mu_{k,a}} \leq \int_0^\infty |f(x)| d\mu_{k,a}(x) + \int_0^\infty |f(-x)| d\mu_{k,a}(x) = \|f\|_{1, d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\tilde{T}_g^y f$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина неравенства (4.22), (4.23) выполнены для всех $1 \leq p \leq \infty$.

Если $\psi(x, y)$ — четная относительно y , то при замене $y \rightarrow -y$, $t \rightarrow -t$, интегралы (4.20), (4.21) не изменятся, поэтому $T_g^{-y} = T_g^y$, $\tilde{T}_g^{-y} = \tilde{T}_g^y$. Лемма 1 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau = \begin{cases} 1 + 3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 4, & \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Для линейных операторов (4.17), (4.18) справедливы оценки

$$|\tau_1^y f(x)| \leq \frac{1}{2} (1 + 3d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{ |f(A)| + |f(-A)| \} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$\begin{aligned}
|\tau_1^y f(x)| &\leq 2 \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0, \\
|T_1^y f(x)| &\leq \frac{1}{2} (1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0, \\
|T_1^y f(x)| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ |f(A)| \left(1 + \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x - yt}{A} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + |f(-A)| \left(1 - \operatorname{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)} \left(\frac{x - yt}{A} \right) \right) \right\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

На подпространстве четных функций

$$\begin{aligned}
|\tau_1^y f(x)| &\leq (1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 |f(A)| dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0. \\
|\tau_1^y f(x)| &\leq \int_{-1}^1 |f(A)| (1 + \operatorname{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 1 для $g(t) = 0$, $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$, $\psi(x, y) = \operatorname{sign} x$, $\operatorname{sign}(xy)$, $\varphi(t, x, y) = t$, $(x - yt)/A$, и учитывая (4.16), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Для всех $1 \leq p \leq \infty$, $y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > -1/2$, линейные операторы (4.17) и (4.18) ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^T, \quad \|T_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^T. \quad (4.24)$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau_1^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda, r}^T.$$

Оценки L^p -норм оператора обобщенного сдвига для (k, a) -обобщенного преобразования Фурье, аналогичного оператору τ^y , при $\lambda \geq 0$ получены в [75].

ЛЕММА 2. *Линейные операторы (4.9) и (4.17), а также (4.10) и (4.18), как операторы из $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R > 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$,

$$S_R(x, f) = \int_{-R}^R \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) e_{r, \lambda}(xz) d\nu_\lambda(z)$$

— частичный интеграл для $f(x)$. Согласно (4.14), (4.17) $\tau_1^y e_{r, \lambda}(xz) = e_{r, \lambda}(xz) e_{r, \lambda}(yz)$, поэтому

$$\begin{aligned}
\tau_1^y S_R(x, f) &= \int_{-R}^R \tau_1^y e_{r, \lambda}(xz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) \\
&= \int_{-R}^R e_{r, \lambda}(xz) e_{r, \lambda}(yz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) d\nu_\lambda(z) = \tau^y S_R(x, f).
\end{aligned}$$

Из ограниченности операторов τ_1^y , τ^y в $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $\tau_1^y f(x) = \tau^y f(x)$. Случай операторов (4.10) и (4.18) разбирается аналогично. Лемма 2 доказана.

Таким образом, операторы (4.17), (4.18) являются продолжениями операторов (4.9), (4.10) на пространства $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $p \neq 2$. В дальнейшем операторы (4.17), (4.18) будем обозначать τ^y , T^y соответственно. В силу (4.10) оператор T^y четный относительно y .

ТЕОРЕМА 3. *Для всех $1 \leq p \leq \infty$, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > -1/2$, справедливы оценки*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\nu_\lambda(y) \right)^{1/p} \leq (1 + d_{2r, \lambda_0}) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0, \quad (4.25)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\nu_\lambda(y) \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейный оператор $B^x f(y) = T^y f(x)$. Неравенство (4.25) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)| \leq \frac{1}{2} (1 + d_{2r, \lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A)| + |f(-A)|\} dm_\lambda(t), \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0,$$

и леммы 1.

При $\lambda \geq 0$ применяем интерполяционную теорему Рисса–Торина. Как и в лемме 2, $\|B^x f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, поэтому достаточно доказать (4.26) для $p = 1$. Так как $T^{-y} = T^y$, то

$$\|B^x f\|_{1, d\nu_\lambda} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\nu_\lambda(y) : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g \text{ — четная} \right\}.$$

Применяя равенство Планшереля и (4.9), (4.10), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\nu_\lambda(y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{r, \lambda}(f)(z) \overline{e_{r, \lambda}(xz) \mathcal{F}_{r, \lambda}(g)(z)} d\nu_\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\tau^x g(y)} d\nu_\lambda(y), \end{aligned}$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1, d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{1, d\nu_\lambda} \sup \{ \|\tau^x g(y)\|_\infty : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g \text{ — четная} \}.$$

Если $\|g\|_\infty \leq 1$, то согласно (4.19)

$$\|\tau^x g(t)\|_\infty \leq \int_{-1}^1 (1 - P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t) = 1$$

и неравенство (4.26) при $p = 1$ выполнено. Теорема 3 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига. Далее до конца статьи $\lambda > -1/2$, $r \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для операторов обобщенного сдвига τ^y , T^y справедливы следующие*

щие свойства:

- 1) если $\lambda \geq 0$, $f(x) \geq 0$, то $T^y f(x) \geq 0$;
- 2) $\tau^0 f(x) = T^0 f(x) = f(x)$;
- 3) $\tau^y 1 = T^y 1 = 1$;
- 4) $\tau^y e_{r,\lambda}(xz) = e_{r,\lambda}(yz)e_{r,\lambda}(xz)$, $T^y e_{r,\lambda}(xz) = j_\lambda(yz)e_{r,\lambda}(xz)$;
- 5) если $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x)g(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\tau^{-y}g(x) d\nu_\lambda(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x)g(x) d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)T^y g(x) d\nu_\lambda(x);$$
- 6) если $f \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^t f(x)d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_\lambda(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^t f(x)d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_\lambda(x);$$
- 7) если $\delta > 0$, $\text{supp } f \subset [-\delta, \delta]$, $|y| \leq \delta$, то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-|y| - \delta, |y| + \delta],$$
 если $|y| > \delta$, то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{supp } T^y f \subset [-|y| - \delta, -|y| + \delta] \cup [|y| - \delta, |y| + \delta].$$

Доказательство проводится как в [73].

4.3. Свертки

С помощью операторов τ^y и T^y определим две свертки

$$(f *_{\tau} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x g(y) d\nu_\lambda(y), \quad (4.27)$$

$$(f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x)g(y) d\nu_\lambda(y). \quad (4.28)$$

В (4.28) предполагается, что функция $g(x)$ четная.

Приведем без доказательств некоторые свойства сверток. Доказательства проводятся как в [73]. Для сверток справедливы неравенства Юнга.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q \geq 1$ и $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то

$$\|(f *_{\tau} g)\|_{s, d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda}^{\tau} \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g\|_{q, d\nu_\lambda}, \quad (4.29)$$

$$\|(f *_{T} g_e)\|_{s, d\nu_\lambda} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g_e\|_{q, d\nu_\lambda}. \quad (4.30)$$

При доказательстве неравенств (4.29) и (4.30) используются оценки (4.24).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $f \in \mathcal{A}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и g — четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f *_{\tau} g)(x) = (f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x)g(y) d\nu_\lambda(y), \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}_r^\lambda(f *_\tau g)(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(f *_T g)(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(f)(y)\mathcal{F}_r^\lambda(g)(y).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p < \infty$, то $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$ почти всюду.

4.4. Обобщенные средние. L^p -сходимость

В этой секции мы следуем [73]. Пусть $\varepsilon > 0$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)$, $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)}\widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = 1.$$

Под $L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ далее будем понимать $C_0(\mathbb{R})$. Для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$, с помощью свертки (4.27) определим (r, λ) -обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y). \quad (4.32)$$

Функцию φ назовем генератором обобщенных средних (4.32). Если функция $\varphi(x)$ — четная, то согласно предложению 4 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = \Phi_\varepsilon^T f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = 2 \int_0^\infty T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y).$$

При рассмотрении средних $\Phi_\varepsilon^T f(x)$ будем всегда предполагать, что генератор четный. В силу (4.29), (4.30)

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} \leq M_{r, \lambda}^\tau \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1, d\nu_\lambda} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad (4.33)$$

$$\|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p, d\nu_\lambda} \leq M_{r, \lambda}^T \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1, d\nu_\lambda} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}. \quad (4.34)$$

Исследуем L^p -сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau^y f - f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = \sup_{|y| \leq \delta} \|T^y f - f\|_{p, d\nu_\lambda}$$

— модули непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ЛЕММА 3. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} \leq (1 + M_{r, \lambda}^\tau) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} \leq (1 + M_{r, \lambda}^T) \|f\|_{p, d\nu_\lambda}, \quad (4.35)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_T(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} = 0. \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (4.24), получим (4.35). Равенство (4.36) докажем для модуля непрерывности $\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda}$. Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для $f, g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$|\omega_\tau(\delta, f)_{p, d\nu_\lambda} - \omega_\tau(\delta, g)_{p, d\nu_\lambda}| \leq (1 + M_{r, \lambda}^\tau) \|f - g\|_{p, d\nu_\lambda},$$

равенство (4.36) можно доказывать для функций из плотного множества $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Для функции Бесселя $j'_\lambda(z) = -zj_{\lambda+1}(z)/(2(\lambda+1))$, поэтому $|j_\lambda(z) - 1| \leq |z|/(2(\lambda+1))$ и из (8) $|e_{r,\lambda}(y, z) - 1| \lesssim |yz|$.

Так как $\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)$ быстро убывает на бесконечности, то согласно (4.9) и ограниченности $M_{r,\lambda}$

$$\begin{aligned} |\tau^y f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |e_{r,\lambda}(xz)| |e_{r,\lambda}(yz) - 1| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |e_{r,\lambda}(yz) - 1| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda(z) \lesssim \int_{\mathbb{R}} |yz| |\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z)| d\nu_\lambda \lesssim |y|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Отсюда вытекает (4.36) при $p = \infty$.

Рассмотрим случай $p < \infty$. Так как из (9) и (4.8) для всех y произведение $e_{r,\lambda}(yz)f(z) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то по теореме 1 $\tau^y f(x) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Получим равномерные оценки по y . Для любого натурального m , $(\Delta_{r,\lambda})_z^m (e_{r,\lambda}(yz)\mathcal{F}_{r,\lambda}(f)(z))$ является конечной линейной комбинацией функций вида

$$|y|^{\alpha_s} j_{\lambda+s}(yz) f_s(z), \quad |y|^{\beta_s} \text{sign} y j_{\lambda+s}(yz) g_s(z), \quad \alpha_s, \beta_s \geq 0, \quad f_s, g_s \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}),$$

и согласно предложению 2 равномерно по $|y| \leq 1$

$$|\tau^y f(x)| \lesssim |x|^{-2m}, \quad |f(x)| \lesssim |x|^{-2m}.$$

Отсюда и из (4.37) для $R > 0$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau^y f(x) - f(x)|^p d\nu_\lambda(x) \lesssim |y|^p \int_{-R}^R d\nu_\lambda + \int_{|x| \geq R} |x|^{-2mp} d\nu_\lambda(x).$$

Следовательно, (4.36) выполнено. Лемма 3 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{r,\lambda}(\varphi)$, функции $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ при $1 \leq p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R})$ при $p = \infty$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - \Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (4.33) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 5 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то в силу (4.31)

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y),$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p, d\nu_\lambda} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) \right\|_{p, d\nu_\lambda} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)\|_{p, d\nu_\lambda} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\nu_\lambda(y) \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\nu_\lambda} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)| d\nu_\lambda(y). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 6 вытекает из (4.35), (4.36) и оценки

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \omega_{\tau}(\varepsilon y, f)_{p, d\nu_{\lambda}} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y) \\ & \leq \omega_{\tau}(\varepsilon R, f)_{p, d\nu_{\lambda}} \int_{|y| \leq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y) + (1 + M_{r, \lambda}^{\tau}) \|f\|_{p, d\nu_{\lambda}} \int_{|y| \geq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\nu_{\lambda}(y). \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы 5 функция φ — четная, то, учитывая неравенство (4.34),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - \Phi_{\varepsilon}^T f\|_{p, d\nu_{\lambda}} = 0.$$

Обобщенные средние $\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f$, для которых имеет место сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$, $1 \leq p \leq \infty$, назовем регулярными.

В [82] рассмотрены следующие примеры средних для преобразования Данкля с четными генераторами: средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Они будут примерами средних и для обобщенного преобразования Ганкеля, как и для обобщенного преобразования Данкля [73]. Для обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) = e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$. Для обобщенных средних Пуассона

$$\varphi(x) = e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda}), \quad \widehat{\varphi}(y) = \frac{c_{\lambda}}{(1 + y^2)^{\lambda+3/2}} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda}).$$

Таким образом, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса и Пуассона являются регулярными. Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^{\delta}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda, \delta} j_{\lambda+\delta+1}(y), \quad \delta > 0.$$

Генератор $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$. Так как $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1 + |y|)^{-(\lambda+\delta+3/2)}$, то $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$, если только $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta > \delta_0$, то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

4.5. Обобщенные средние. Сходимость почти всюду

Пусть $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$, $1 \leq p < \infty$, $\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f(x)$ — обобщенные средние (4.32),

$$\Phi^{\tau} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |\Phi_{\varepsilon}^{\tau} f(x)|$$

— мажоранта обобщенных средних,

$$d_f(\alpha) = \int_{\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| > \alpha\}} d\nu_{\lambda}(x)$$

— функция распределения f , $L^{p, \infty}(\mathbb{R}, d\nu_{\lambda})$ — множество измеримых функций, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p, \infty, d\nu_{\lambda}} = \sup\{\alpha (d_f(\alpha))^{1/p} : \alpha > 0\}$$

(неравенство треугольника выполняется с константой, большей единицы [83, Sect. 1.4.1]).

Пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ называют слабым L^p -пространством, так как имеет место строгое вложение $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и $\|f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \leq \|f\|_{p,d\nu_\lambda}$.

При исследовании сходимости почти всюду обобщенных средних $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ будем опираться на следующее утверждение типа теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [83, Theorem 2.1.14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $1 \leq p < \infty$, множество $D \subset L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ выполнено неравенство

$$\|\Phi^\tau f\|_{p,\infty,d\nu_\lambda} \lesssim \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \quad (4.38)$$

и для любой $f \in D$ обобщенные средние $\Phi_\varepsilon^\tau f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, то они сходятся к $f(x)$ почти всюду для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$.

Неравенство (4.38) называют слабым L^p -неравенством. По теореме 6 в качестве множества D можно взять $C_0(\mathbb{R})$. В этом случае будет иметь место даже равномерная сходимость. Для доказательства неравенства (4.38) нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда.

Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}$. Для функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$ и (r, λ) -обобщенного преобразования Ганкеля максимальную функцию $\mathcal{M}_{r,\lambda}f$ определим с помощью свертки (4.27)

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)}.$$

Применяя предложение 4 и четность оператора T^y по y , получим

$$\mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-s,s]}(y) d\nu_\lambda(y)} = \sup_{s>0} \frac{\left| \int_0^\infty T^y f(x) \chi_{[0,s]}(y) d\nu_\lambda(y) \right|}{\int_0^\infty \chi_{[0,s]}(y) d\nu_\lambda(y)}.$$

ЛЕММА 4. Если $\lambda, y \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varphi(x)$ — четный генератор, справедлива оценка $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+y)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi^\tau f(x) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 3, 4, T^y — положительный оператор и для почти всех x , $(f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = (f *_{T^y} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$. Отсюда $|T^y f(x)| \leq T^y |f|(x)$ и

$$\Phi^\tau f(x) = \Phi^T f(x) \leq \sup_{\varepsilon>0} (|f| *_{T^y} |\widehat{\varphi}_\varepsilon|)(x), \quad \mathcal{M}_{r,\lambda}f(x) \leq \mathcal{M}_{r,\lambda}|f|(x).$$

Следовательно, мы можем далее считать, что $f(x), \widehat{\varphi}(y) \geq 0$.

Используя разложение

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) \chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1})}(y)$$

и равенство $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2(\lambda+1)} \widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y)$, получим

$$\int_0^\infty T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\nu_\lambda(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) \chi_{[\varepsilon 2^j, \varepsilon 2^{j+1})}(y) d\nu_\lambda(y)$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1+2^j)^{-\gamma} \left(\frac{2^j}{1+2^j} \right)^{2(\lambda+1)} \frac{\int_0^\infty T^y f(x) \chi_{[0, \varepsilon 2^{j+1}]}(y) d\nu_\lambda(y)}{\int_0^\infty \chi_{[0, \varepsilon 2^{j+1}]}(y) d\nu_\lambda(y)} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-\gamma j} + 2^{-2(\lambda+1)j}) \mathcal{M}_{r,\lambda} f(x) \lesssim \mathcal{M}_{r,\lambda} f(x). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $M_{k,a}f$ обобщенного преобразования Фурье при $a = \frac{1}{r}$ справедливо слабое L^1 -неравенство и сильное L^p -неравенство при $1 < p < \infty$ [84]. С помощью замен переменных (7) убеждаемся, что аналогичные утверждения справедливы и для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{r,\lambda}f$ обобщенного преобразования Ганкеля. Следовательно, в условиях леммы 4 для мажоранты обобщенных средних $\Phi^\tau f$ справедливо неравенство (4.38) и мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\lambda \geq 0$, $\gamma > 0$, четные функции $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}$, $\varphi(0) = 1$, и $|\widehat{\varphi}(y)| \lesssim (1+|y|)^{-(2\lambda+2+\gamma)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leq p < \infty$, то почти всюду

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon^\tau f(x) = f(x).$$

Учитывая оценки для обобщенных преобразований Ганкеля генераторов обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона и Бохнера–Рисса при $\delta > \delta_0$, мы получаем их сходимость почти всюду для функций из $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p < \infty$, если $\lambda = r(2k-1) \geq 0$ или $k \geq 1/2$.

4.6. Приложение

В этой секции дается простое доказательство теоремы умножения Voubatra–Negzaoui–Sifi [75] для нормированных функций Бесселя, используемой при получении интегрального представления операторов обобщенного сдвига для (k, a) -обобщенного преобразования Фурье, обобщенного преобразования Данкля и обобщенного преобразования Ганкеля.

ТЕОРЕМА 7. Если $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > -1/2$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|t| \leq 1$, $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$, то

$$x^n j_{\lambda+n}(x) j_\lambda(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+n}(A) A^n P_n^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) dm_\lambda(t). \quad (4.39)$$

При $n = 0$, $P_0^{(\lambda-1/2)}(t) = 1$, получается известная теорема умножения Гегенбауэра [78, Chap. XI, 11.41]:

$$j_\lambda(x) j_\lambda(y) = \int_{-1}^1 j_\lambda(A) dm_\lambda(t), \quad (4.40)$$

которая позволяет записать оператор обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A) dm_\lambda(t)$$

для преобразования Ганкеля

$$\mathcal{H}_\lambda(f)(y) = 2 \int_0^\infty f(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x).$$

При $n = 1$, $P_1^{(\lambda-1/2)}(t) = t$, получается теорема умножения

$$xj_{\lambda+1}(x)j_{\lambda}(y) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+1}(A)(x - yt) dm_{\lambda}(t), \quad (4.41)$$

которая вместе с теоремами умножения Гегенбауэра (4.40) и

$$xyj_{\lambda+1}(x)j_{\lambda+1}(y) = 4(\lambda + 1)^2 \int_{-1}^1 j_{\lambda+1}(A)t dm_{\lambda}(t)$$

позволяет получить интегральное представление оператора обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left(1 + \frac{x+y}{A} \right) + f(-A) \left(1 - \frac{x+y}{A} \right) \right\} (1-t) dm_{\lambda}(t)$$

для одномерного преобразования Данкля (см., например, [85]).

Формула (4.41) получается дифференцированием по x обеих частей равенства (4.40). И в общем случае искомую теорему умножения будем доказывать по индукции, дифференцируя (4.39) и используя следующие свойства нормированных функций Бесселя $j_{\lambda}(x)$

$$j'_{\lambda}(x) = -\frac{x}{2(\lambda + 1)} j_{\lambda+1}(x), \quad (4.42)$$

$$\frac{x^2}{4(\lambda + 1)(\lambda + 2)} j_{\lambda+2}(x) = j_{\lambda+1}(x) - j_{\lambda}(x), \quad (4.43)$$

и многочленов Гегенбауэра

$$(P_n^{(\lambda-1/2)}(x))' = \frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1} P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x), \quad (4.44)$$

$$(n+2\lambda)P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x) = 2(n+\lambda)xP_n^{(\lambda-1/2)}(x) - nP_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x), \quad (4.45)$$

$$(1-t^2)P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(x) = \frac{2\lambda+1}{2(n+\lambda)} \left(P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(x) - P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(x) \right). \quad (4.46)$$

Равенство (4.44) и рекуррентное соотношение (4.45) можно найти в [86, Шар. 4, 4.7], [87, Lecture 1, 1.5]. Соотношение (4.46) и даже в более общем виде для многочленов Якоби имеется в [86, Шар. 4, 4.5].

Нам понадобится еще одно свойство из [75], для которого мы также приведем более простое доказательство. Отметим, что $A' = A'_x = (x - ty)/A$.

ЛЕММА 5. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(A^n P_n^{(\lambda-1/2)}(A'))' = nA^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A'). \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для производных по x

$$(A')^2 + AA'' = (AA')' = (x - ty)' = 1,$$

то согласно (4.44)–(4.46)

$$(A^n P_n^{(\lambda-1/2)}(A'))' = nA^{n-1} A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n(n+2\lambda)}{2\lambda+1} A^n A'' P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A')$$

$$\begin{aligned}
&= nA^{n-1} \left\{ A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n+2\lambda}{2\lambda+1} (1 - (A')^2) P_{n-1}^{(\lambda+1/2)}(A') \right\} \\
&= nA^{n-1} \left\{ \frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)} P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') + \frac{n}{2(n+\lambda)} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda)} \left(P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') - P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right) \right\} = nA^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A').
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Доказательство теоремы будем вести индукцией по n . При $n = 0, 1$ (4.40) верно. Пусть (4.39) верно для всех параметров меньше или равных n . Продифференцируем обе части равенства (4.40) по x .

Для производной левой части в силу (4.42), (4.43), получим

$$\begin{aligned}
&(x^n j_{\lambda+n}(x) j_\lambda(x))' = nx^{n-1} j_{\lambda+n}(x) j_\lambda(x) - \frac{x^{n+1}}{2(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(x) \\
&= nx^{n-1} \left(j_{\lambda+n-1}(x) - \frac{x^2 j_{\lambda+n+1}(x)}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} \right) j_\lambda(x) - \frac{x^{n+1} j_{\lambda+n+1}(x)}{2(\lambda+n+1)} j_\lambda(x) \\
&= nx^{n-1} j_{\lambda+n-1}(x) j_\lambda(x) - \frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(x). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Применяя для производной подынтегральной функции в правой части последовательно (4.43), (4.47), (4.45) и (4.44), получим

$$\begin{aligned}
&(j_{\lambda+n}(A) A^n P_n^{\lambda-1/2}(A'))' = -\frac{A^{n+1}}{2(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) A' P_n^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&+ n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') = -\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&- \frac{nA^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') + n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&= -\frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&- nA^{n-1} (j_{\lambda+n}(A) - j_{\lambda+n-1}(A)) P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') + n j_{\lambda+n}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \\
&= n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') - \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A').
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.47), (4.48)

$$\begin{aligned}
&nx^{n-1} j_{\lambda+n-1}(x) j_\lambda(x) - \frac{(n+2\lambda)x^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(x) \\
&= \int_{-1}^1 \left\{ n j_{\lambda+n-1}(A) A^{n-1} P_{n-1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+2\lambda)A^{n+1}}{4(\lambda+n)(\lambda+n+1)} j_{\lambda+n+1}(A) P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') \right\} dm_\lambda(t).
\end{aligned}$$

В силу индуктивного предположения

$$x^{n+1} j_{\lambda+n+1}(x) j_\lambda(x) = \int_{-1}^1 j_{\lambda+n+1}(A) A^{n+1} P_{n+1}^{(\lambda-1/2)}(A') dm_\lambda(t).$$

Теорема 7 доказана.

4.7. Некоторые свойства обобщенного преобразования Фурье

Преобразование $\mathcal{F}_{k,a}$ (10) унитарный оператор [90, гл. 5] и для $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ справедливо обобщенное равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) \overline{\mathcal{F}_{k,a}(g)(y)} d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\mu_{k,a}(x). \quad (4.49)$$

Напомним, что $\lambda = (2k - 1)/a$. Из асимптотики функции Бесселя [98, гл. 7, 7.1]

$$|B_{k,a}(x, y)| \lesssim \frac{1}{(1 + |xy|)^{\lambda+1/2}}.$$

Равномерная норма ядра (11) конечна, если только $\lambda \geq -1/2$:

$$M_{k,a} = \|B_{k,a}(x, y)\|_{\infty} = \|b_{k,a}(x)\|_{\infty} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 23. *Если $a > 0$, $f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}_{k,a}(f)$, $\delta_{k,a}f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a > 0$, $f(x) = F(|x|^{a/2})$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, F — четная. Применяя (10), (11), делая замену переменной $x^{a/2} = au/2$, и учитывая, что $\mathcal{F}_{k,2}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) &= 2 \int_0^{\infty} F(x^{a/2}) j_{\lambda} \left(\frac{2}{a} |xy|^{a/2} \right) d\mu_{k,a}(x) = \\ &= 2c_{k,a} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \int_0^{\infty} F \left(\frac{a}{2} u \right) j_{\lambda} \left(|y|^{a/2} u \right) u^{2\lambda+1} du = \\ &= c_{k,a} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \int_{\mathbb{R}} F \left(\frac{a}{2} u \right) j_{\lambda} \left(|y|^{a/2} u \right) |u|^{2\lambda+1} du = \\ &= \frac{c_{k,a}}{c_{k,2}} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda+1} \mathcal{F}_{k,2} \left(F \left(\frac{a}{2} \cdot \right) \right) \left(|y|^{a/2} \right) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Аналогично, если $f(x) = xF(|x|^{a/2})$, то, полагая $k_1 = k + 1$, $\lambda_1 = \lambda + 2/a = (2k_1 - 1)/a$, получим

$$\begin{aligned} &2y \int_0^{\infty} x^2 F(x^{a/2}) j_{\lambda+\frac{2}{a}} \left(\frac{2}{a} |xy|^{a/2} \right) d\mu_{k,a}(x) = \\ &= 2c_{k,a} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \int_0^{\infty} F \left(\frac{a}{2} u \right) j_{\lambda_1} \left(|y|^{a/2} u \right) u^{2\lambda_1+1} du \\ &= c_{k,a} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \int_{\mathbb{R}} F \left(\frac{a}{2} u \right) j_{\lambda_1} \left(|y|^{a/2} u \right) |u|^{2\lambda_1+1} du = \frac{c_{k,a}}{c_{k_1,2}} \left(\frac{a}{2} \right)^{2\lambda_1+1} y \mathcal{F}_{k_1,2} \left(F \left(\frac{a}{2} \cdot \right) \right) \left(|y|^{a/2} \right), \end{aligned}$$

поэтому $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$.

Пусть $f(x) = F_1(|x|^{a/2}) + xF_2(|x|^{a/2})$, $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, F_1, F_2 — четные. Имеем

$$f'(x) = \frac{a}{2} x |x|^{a-2} \left\{ \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + x \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} \right\} + F_2(|x|^{a/2}),$$

$$f''(x) = \frac{a}{2} |x|^{a-2} \left\{ \left[\left(\frac{a}{2} - 1 \right) \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2} F_1''(|x|^{a/2}) \right] + x \left[\left(\frac{a}{2} + 1 \right) \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + \frac{a}{2} F_2''(|x|^{a/2}) \right] \right\}.$$

Так как [89, theorem 2.13]

$$\Delta_k f(x) = f''(x) + \frac{2k}{x} f'(x) - \frac{k}{x^2} (f(x) - f(-x)) = f''(x) + \frac{2k}{x} (f'(x) - F_2(|x|^{a/2})),$$

то

$$\begin{aligned} \delta_{k,a} f(x) = |x|^{2-a} \Delta_k f(x) &= \frac{a}{4} \left\{ (4k + a - 2) \frac{F_1'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + a F_1''(|x|^{a/2}) \right. \\ &\left. + x \left((4k + a + 2) \frac{F_2'(|x|^{a/2})}{|x|^{a/2}} + a F_2''(|x|^{a/2}) \right) \right\} \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Теорема 23 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R}), \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$ — подмножества четных и нечетных функций, то $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,e}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})), \delta_{k,a}(\mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_{a,o}(\mathbb{R})$.

Пусть

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : f, \mathcal{F}_{k,a}(f) \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})\}. \quad (4.50)$$

Из теоремы 23 вытекает следствие.

Следствие 1. Для $a > 0$ справедливо вложение $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{k,a}$.

В [90, гл. 5] многие свойства преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ устанавливаются на некотором подмножестве, плотном в $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$. По теореме 23 в качестве такого подмножества можно взять класс $\mathcal{S}_a(\mathbb{R})$. Например, если $f \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} (\delta_{k,a})^n f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x) = (-1)^n |y|^{an} \int_{\mathbb{R}} f(x) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(x), \quad (4.51)$$

откуда

$$(\delta_{k,a})_x B_{k,a}(x, y) = -|y|^a B_{k,a}(x, y).$$

Если $f, g \in \mathcal{S}_a(\mathbb{R})$, то

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \delta_{k,a} f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_{k,a} g(x) d\mu_{k,a}(x).$$

4.8. Операторы обобщенного сдвига

Пусть $\{P_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha)}(1) = 1$,

$$d_{n,\alpha} = \max_{[-1,1]} |P_n^{(\alpha)}(t)|. \quad (4.52)$$

При $\alpha \geq -1/2$, $d_{n,\alpha} = 1$ (см., например, [91]). С многочленами Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$, ортогональными с весом $(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$ (см. [99, гл. 10, 10.9]), $\lambda > -1/2$, многочлены $P_n^{(\alpha)}(t)$ связаны соотношениями

$$C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda)} P_n^{(\lambda-1/2)}(t) \text{ при } \lambda \neq 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} C_n^\lambda(t) = \frac{2}{n} P_n^{(-1/2)}(t). \quad (4.53)$$

Для удобства далее будем использовать обозначение $\lambda_0 = \lambda - 1/2$.

Пусть $\lambda > -1/2$, $dm_\lambda(t) = c_\lambda(1-t^2)^{\lambda_0} dt$ — вероятностная мера на отрезке $[-1, 1]$,

$$c_\lambda^{-1} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda_0} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}. \quad (4.54)$$

Пусть $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $\lambda = r(2k-1) > -1/2$. Ядро обобщенного оператора Фурье (10) может быть записано в виде

$$B_{k,a}(x, y) = b_{k,a}(xy) = j_\lambda(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}) + \frac{(-1)^r r^{2r}}{(\lambda+1)_{2r}} xy j_{\lambda+2r}(2r|xy|^{\frac{1}{2r}}).$$

Приведем некоторые его свойства. Известно [91], что

$$B_{k,a}(x, y) = \int_{-1}^1 (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) e^{-2ri|xy|^{\frac{1}{2r}}t} dm_\lambda(t). \quad (4.55)$$

Из (4.52) и (4.55) вытекают оценки

$$M_{k,a} \leq 1 + d_{2r, \lambda_0}, \quad -1/2 < \lambda < 0, \quad M_{k,a} = 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.56)$$

Обратное преобразование имеет вид $(\mathcal{F}_{k,a})^{-1} = \mathcal{F}_{k,a}$ (см. [90, теорема 5.3]). Равенство

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) B_{k,a}(x, y) d\mu_{k,a}(y)$$

справедливо не только в $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, но и поточечно, если $f \in \mathcal{A}_{k,a}$ (4.50).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $|t| \leq 1$,

$$A_n = A_n(x, y, t) = \sqrt{|x|^{\frac{2}{n}} + |y|^{\frac{2}{n}} - 2|xy|^{\frac{1}{n}}t}, \quad B_n(x, y, t) = \frac{|x|^{\frac{1}{n}} - |y|^{\frac{1}{n}}t}{A_n(x, y, t)}. \quad (4.57)$$

Функции $A_n(x, y, t)$, $B_n(x, y, t)$ — четные по x и y и

$$1 - B_n^2(x, y, t) = \frac{(1-t^2)|y|^{\frac{2}{n}}}{A_n^2(x, y, t)} \geq 0, \quad |B_n(x, y, t)| \leq 1. \quad (4.58)$$

Первое интегральное представление оператора обобщенного сдвига τ^y (14) получено в [94]. Удобное для нас представление получено в [95, 96]. Заменяя в нем многочлены Гегенбауэра $C_{2r}^\lambda(t)$ на многочлены $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$ по формуле (4.53), приходим к более простому и компактному виду

$$\begin{aligned} \tau^y f(x) &= \int_{-1}^1 \left\{ (f(A_{2r}^{2r}))_e (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) \right. \\ &\quad \left. + ((f(A_{2r}^{2r}))_0 (\text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)) + \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t)))) \right\} dm_\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A_{2r}^{2r}) (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) + \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)) + \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t)) \right\} \\ &\quad + f(-A_{2r}^{2r}) (1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t) - \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)) - \text{sign}y P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(y, x, t))) \left\} dm_\lambda(t). \end{aligned} \quad (4.59)$$

На четных функциях

$$\tau^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_{2r}^{2r})(1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t). \quad (4.60)$$

Интегральное представление оператора обобщенного сдвига T^y получаем из (15) и (4.59)

$$T^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{ f(A_{2r}^{2r})(1 + \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t))) + f(-A_{2r}^{2r})(1 - \text{sign}x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t))) \} dm_\lambda(t). \quad (4.61)$$

Из (4.60) и (4.61) вытекает, что оператор τ^y на четных функциях и оператор T^y при $\lambda \geq 0$ положительные и $T^{-y} = T^y$ при $\lambda > -1/2$.

Пусть функция $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ — измеримая по Борелю, функция $\psi(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ — нечетная по x , функция $\varphi(t, x, y): [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ — четная по x и y , функции ψ, φ — измеримые по Лебегу, и линейные операторы $T_g^y, \tilde{T}_g^y, T_0^y$, определены равенствами

$$T_g^y f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{ f(A_n^n)(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + f(-A_n^n)(1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t), \quad (4.62)$$

$$\tilde{T}_g^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_n^n)(1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) dm_\lambda(t), \quad T_0^y f(x) = \int_{-1}^1 f(A_n^n) dm_\lambda(t). \quad (4.63)$$

Лемма 1. Если $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_+$, $\lambda = n(2k - 1)/2$, $u f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu_{k,a})$, то

$$\int_0^\infty |T_0^y f(x)| x^{2k+2/n-2} dx \leq \int_0^\infty |f(x)| x^{2k+2/n-2} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|T_0^y f(x)| \leq T_0^y |f|(x)$, то можно считать $f(x) \geq 0$. Имеем

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = c_\lambda \int_0^\infty \int_{-1}^1 f((x^{\frac{2}{n}} + y^{\frac{2}{n}} - 2(xy)^{\frac{1}{n}}t)^{n/2})(1 - t^2)^{\lambda-1/2} x^{2k+2/n-2} dt dx.$$

Делая замену переменной $A_n(x, y, t) = z^{1/n}$ (4.57), получим

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) K^\lambda(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, z^{\frac{1}{n}}) z^{2k+2/n-2} dz x^{2k+2/n-2} dx,$$

где

$$K^\lambda(u, v, w) = c_\lambda \frac{(((u+v)^2 - w^2)(w^2 - (u-v)^2))^{\lambda-1/2}}{2^{2\lambda-1}(uvw)^{2\lambda}}$$

и носитель функции $K^\lambda(u, v, w)$, как функции w , лежит на отрезке $[|u-v|, u+v]$. Так как $K^\lambda(u, v, w) = K^\lambda(w, v, u)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) K^\lambda(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, z^{\frac{1}{n}}) z^{2k+2/n-2} dz x^{2k+2/n-2} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty K^\lambda(z^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{n}}) x^{2k+2/n-2} dx \int_0^\infty f(z) z^{2k+2/n-2} dz. \end{aligned}$$

Заменяя $z = u^n$, $y = v^n$, $x = w^n$, получим

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty K^\lambda(z^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{n}}) x^{2k+2/n-2} dx = \int_0^\infty K^\lambda(u, v, w) w^{2\lambda+1} dw = 1$$

(см., например, [94]). Следовательно,

$$\int_0^\infty T_0^y f(x) x^{2k+2/n-2} dx = \int_0^\infty f(z) z^{2k+2/n-2} dz.$$

Лемма 1 доказана.

Для $n = 1$ лемма 1 хорошо известна (см., например, [100]).

Лемма 2. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}$ операторы $T_g^y f(x)$, $\tilde{T}_g^y f(x)$ положительные. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\|T_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}, \quad (4.64)$$

если дополнительно для всех x, y , $\int_{-1}^1 g(\varphi(t, x, y)) dm_\lambda(t) = 0$, то

$$\|\tilde{T}_g^y f\|_{p, d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,a}}. \quad (4.65)$$

Если функция $\psi(x, y)$ четная по y , то и операторы T_g^y , \tilde{T}_g^y четные по y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \geq 0$, то $T_g^y f(x) \geq 0$, $\tilde{T}_g^y f(x) \geq 0$. Если $p = \infty$, то согласно (4.54)

$$\begin{aligned} & \|T_g^y f\|_\infty \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_x \int_{-1}^1 \{ (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} dm_\lambda(t) \|f\|_\infty = \\ & = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\tilde{T}_g^y f$ при дополнительном условии, что среднее значение функции $g(\varphi(t, x, y))$ по t и мере dm_λ равно нулю.

Если $p = 1$, то делая замену $x \rightarrow -x$ и учитывая свойства функций A_n^n , ψ , φ , получим

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\infty}^\infty |T_g^y f(x)| d\mu_{k,a}(x) \\ & \leq \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A_n^n)| (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + |f(-A_n^n)| (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} \\ & \quad dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x) \\ & + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A_n^n)| (1 - \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) + |f(-A_n^n)| (1 + \psi(x, y)g(\varphi(t, x, y))) \} \\ & \quad dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x) \\ & = 2 \int_0^\infty \int_{-1}^1 \{ |f(A_n^n)| + |f(-A_n^n)| \} dm_\lambda(t) d\mu_{k,a}(x). \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, получим

$$\|T_g^y f\|_{1, d\mu_{k,a}} \leq \int_0^\infty |f(x)| d\mu_{k,a}(x) + \int_0^\infty |f(-x)| d\mu_{k,a}(x) = \|f\|_{1, d\mu_{k,a}}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для оператора $\tilde{T}_g^y f$. По интерполяционной теореме Рисса–Торина неравенства (4.64), (4.65) выполнены для всех $1 \leq p \leq \infty$.

Если $\psi(x, y)$ — четная относительно y , то при замене $y \rightarrow -y$, интегралы (4.62), (4.63) не изменятся, поэтому $T_g^{-y} = T_g^y$, $\tilde{T}_g^{-y} = \tilde{T}_g^y$. Лемма 2 доказана.

Пусть

$$M_{\lambda,r}^\tau = \begin{cases} 1 + 3d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 4, & \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$M_{\lambda,r}^T = \begin{cases} 1 + d_{2r,\lambda_0}, & -1/2 < \lambda < 0, \\ 1, & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Для линейных операторов (4.59), (4.61) справедливы оценки

$$|\tau^y f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + 3d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|\tau^y f(x)| \leq 2 \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0,$$

$$|T^y f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|T^y f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})|(1 + \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t))) + |f(-A_{2r}^{2r})|(1 - \text{sign} x P_{2r}^{(\lambda_0)}(B_{2r}(x, y, t)))\} dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.$$

На подпространстве четных функций

$$|\tau^y f(x)| \leq (1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 |f(A_{2r}^{2r})| dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

$$|\tau^y f(x)| \leq \int_{-1}^1 |f(A_{2r}^{2r})|(1 + \text{sign}(xy) P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)) dm_\lambda(t), \quad \lambda \geq 0.$$

Применяя лемму 2 для $g(t) = 0$, $P_{2r}^{(\lambda_0)}(t)$, $\psi(x, y) = \text{sign} x$, $\text{sign}(xy)$, $\varphi(t, x, y) = t$, $B_{2r}(x, y, t)$, и учитывая (4.57) и (4.58), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 24. *Для всех $1 \leq p \leq \infty$, $y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > -1/2$, линейные операторы (4.59) и (4.61) ограничены в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и для их норм справедливы оценки*

$$\|\tau^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^\tau, \quad \|T^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^T. \quad (4.66)$$

На подпространстве четных функций

$$\|\tau^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{\lambda,r}^T.$$

Неравенство (4.66) для оператора τ^y при $\lambda \geq 0$ доказано в [94].

ТЕОРЕМА 25. Для всех $1 \leq p \leq \infty$, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > -1/2$, справедливы оценки

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/p} \leq (1 + d_{2r,\lambda_0}) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad -1/2 < \lambda < 0, \quad (4.67)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейный оператор $B^x f(y) = T^y f(x)$. Неравенство (4.67) вытекает из оценки

$$|B^x f(y)| \leq \frac{1}{2} (1 + d_{2r,\lambda_0}) \int_{-1}^1 \{|f(A_{2r}^{2r})| + |f(-A_{2r}^{2r})|\} dm_\lambda(t), \quad -1/2 < \lambda < 0,$$

и лемм 1, 2.

Пусть $\lambda \geq 0$. Применяем интерполяционную теорему Рисса–Торина. Как и в лемме 2, $\|B^x f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, поэтому достаточно доказать (4.68) для $p = 1$. Так как $T^y = T^{-y}$, то [101, (12.13)]

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\mu_{k,a}(y) : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g \text{ — четная} \right\}.$$

Применяя обобщенное равенство Планшереля (4.49) и (14), (15), получим

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \overline{g(y)} d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \overline{B_{k,a}(x,z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z)} d\mu_{k,a}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\tau^x g(y)} d\nu_\lambda(y),$$

поэтому

$$\|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} \leq \|f\|_{1,dd\mu_{k,a}} \sup \{ \|\tau^x g\|_\infty : \|g\|_\infty \leq 1, g \in C_K(\mathbb{R}), g \text{ — четная} \}.$$

Если $\|g\|_\infty \leq 1$ и g — четная, то согласно теореме 24

$$\|\tau^x g\|_\infty \leq 1, \quad \|B^x f\|_{1,d\mu_{k,a}} \leq 1.$$

Теорема 25 доказана.

Соберем вместе некоторые свойства операторов обобщенного сдвига.

ТЕОРЕМА 26. Для операторов обобщенного сдвига τ^y , T^y справедливы следующие

свойства:

$$1. \text{ Если } \lambda \geq 0, f(x) \geq 0, \text{ то } T^t f(x) \geq 0. \quad (4.69)$$

$$2. \tau^0 f(x) = T^0 f(x) = f(x), \quad \tau^y f(x) = \tau^x f(y). \quad (4.70)$$

$$3. \tau^t 1 = T^t 1 = 1. \quad (4.71)$$

$$4. \tau^y B_{k,a}(x, z) = B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z), \quad T^y B_{k,a}(x, z) = (B_{k,a}(y, z))_e B_{k,a}(x, z), \\ \mathcal{F}_{k,a}(\tau^y f)(z) = B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z), \quad \mathcal{F}_{k,a}(T^y f)(z) = (B_{k,a}(y, z))_e \mathcal{F}_{k,a}(f)(z). \quad (4.72)$$

5. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tau^y g(x) d\mu_{k,a}(x), \quad (4.73)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T^y g(x) d\mu_{k,a}(x). \quad (4.74)$$

6. Если $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x), \quad (4.75)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^t f(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x). \quad (4.76)$$

7. Пусть $\delta > 0$, $\text{supp } f \subset [-\delta, \delta]$. Если $|y| \leq \delta$ и $\delta_1 = (|y|^{\frac{1}{2r}} + \delta^{\frac{1}{2r}})^{2r}$, то

$$\text{supp } \tau^y f, \text{ supp } T^y f \subset [-\delta_1, \delta_1]. \text{ Если } |y| > \delta \text{ и } \delta_2 = (|y|^{\frac{1}{2r}} - \delta^{\frac{1}{2r}})^{2r}, \text{ то}$$

$$\text{supp } \tau^y f, \text{ supp } T^y f \subset [-\delta_1, -\delta_2] \cup [\delta_2, \delta_1]. \quad (4.77)$$

8. Если $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, то для всех y , $\tau^y f, T^y f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. (4.78)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (4.69)–(4.72) получаются из (11), (14), (15), (4.54), (4.59), (4.61). Свойства (4.73), (4.74) вытекают из обобщенного равенства Планшереля (4.49).

Если $\chi_R(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-R, R]$, то $\lim_{R \rightarrow \infty} \chi_R(x) = 1$ для всех x , поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости согласно (4.61), $\lim_{R \rightarrow \infty} T^y \chi_R(x) = 1$ для всех x и y . Для любой $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) d\mu_{k,a}(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) T^y \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{k,a}(x).$$

Но для таких f по свойству (4.74)

$$\int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) T^y \chi_R(x) d\mu_{k,a}(x)$$

и для них свойство (4.76) выполнено. Так как множество $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap L^2(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ плотно в $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, то в силу непрерывности оператора T^y в $L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ свойство (4.76) выполнено для всех $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$. Свойство (4.75) для оператора τ^y доказывается аналогично.

Свойство (4.77) вытекает из неравенства $A_{2r}^{2r}(x, y, t) \geq ||x|^{\frac{1}{2r}} - |y|^{\frac{1}{2r}}|^{2r}$ в (4.59), (4.61).

Пусть $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. По теореме 23 $\mathcal{F}_{k,a}(f) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Так как $z^2 = (|z|^{1/2r})^{4r}$, то $z^2 \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$ и $B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Следовательно, для всех y

$$\tau^y f(x) = \mathcal{F}_{k,a}(B_{k,a}(y, \cdot) \mathcal{F}_{k,a}(f)(\cdot))(x) \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R}).$$

Свойство (4.78) для оператора T^y доказывается аналогично. Теорема 26 доказана.

4.9. Свертки

С помощью операторов τ^y и T^y определим две свертки

$$(f *_{\tau} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(y) d\mu_{k,a}(y), \quad (4.79)$$

$$(f *_{T} g_e)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_e(y) d\mu_{k,a}(y). \quad (4.80)$$

Лемма 3. Если $f \in \mathcal{A}_{k,a}$, $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ и g — четная, то для всех $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f *_{\tau} g)(x) = (f *_{T} g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y), \quad (4.81)$$

$$\mathcal{F}_{k,a}(f *_{\tau} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f *_{T} g)(y) = \mathcal{F}_{k,a}(f)(y) \mathcal{F}_{k,a}(g)(y). \quad (4.82)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.79), (10) и (14)

$$\begin{aligned} (f *_{\tau} g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(y) d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(y, z) B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z) d\mu_{k,a}(z). \end{aligned}$$

Согласно теореме 24 и условий леммы все предыдущие интегралы сходятся абсолютно. Аналогично, применяя (4.80) и (15), получим

$$\begin{aligned} (f *_{T} g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g(y) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} (B_{k,a}(y, z))_e B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) d\mu_{k,a}(z) d\mu_{k,a}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} B_{k,a}(x, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z) \mathcal{F}_{k,a}(g)(z) d\mu_{k,a}(z). \end{aligned}$$

Равенства (4.81) и (4.82) и лемма 3 доказаны.

Для сверток (4.79) и (4.80) докажем неравенство Юнга.

ТЕОРЕМА 27. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q \geq 1$ и $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, то

$$\|(f *_{\tau} g)\|_{s, d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \|g\|_{q, d\mu_{k,a}}, \quad (4.83)$$

$$\|(f *_{T} g_e)\|_{s, d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \|g_e\|_{q, d\mu_{k,a}}. \quad (4.84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство можно провести как в [97]. Обычно константа в неравенстве Юнга равна 1. Так как константа в (4.83) больше 1, а в (4.84) может быть больше 1, доказательство все таки приведем, например, для свертки (4.80).

Пусть $1/\mu = 1/p - 1/s$ и $1/\nu = 1/q - 1/s$. Тогда $1/\mu \geq 0$, $1/\nu \geq 0$ и $1/s + 1/\mu + 1/\nu = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) g_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_\varepsilon(y)|^q d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/s} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_\varepsilon(y)|^q d\mu_{k,a}(y) \right)^{1/\nu} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_\varepsilon(y)|^q d\mu_{k,a}(t) \right)^{1/s} \|T^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}^{p/\mu} \|g_\varepsilon\|_{q,d\mu_{k,a}}^{q/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (4.66) для оператора T^y

$$\begin{aligned} \|(f *_T g_\varepsilon)\|_{s,d\mu_{k,a}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |T^y f(x)|^p |g_\varepsilon(y)|^q d\mu_{k,a}(y) d\mu_{k,a}(x) \right)^{1/s} \\ &\quad \times \|T^y f\|_{p,d\mu_{k,a}}^{p/\mu} \|g_\varepsilon\|_{q,d\mu_{k,a}}^{q/\nu} \leq M_{r,\lambda}^T \|f\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g_\varepsilon\|_{q,d\mu_{k,a}}. \end{aligned}$$

Неравенство (4.84) доказано. Неравенство (4.83) доказывается аналогично. Теорема 27 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $1 \leq p < \infty$, $f \in C_0(\mathbb{R})$ при $p = \infty$, $f_\varepsilon \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, g — четная, то применяя лемму 3 и теорему 26, получим

$$\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq \{M_{r,\lambda}^\tau + M_{r,\lambda}^T\} \|f - f_\varepsilon\|_{p,d\mu_{k,a}} \|g\|_{1,d\mu_{k,a}},$$

поэтому, $\|(f *_\tau g)(x) - (f *_T g)(x)\|_{p,d\mu_{k,a}} = 0$ и $(f *_\tau g)(x) = (f *_T g)(x)$ почти всюду.

4.10. Обобщенные средние. Сходимость в пространствах L^p

Пусть $\varepsilon > 0$, $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-(2k+1/r-1)} \widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}y), \quad \widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,a}) \cap C_0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) = 1.$$

Далее под $L^\infty(\mathbb{R})$ мы понимаем $C_0(\mathbb{R})$. В соответствии с теоремой 26 для $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, определяем $(k, 1/r)$ -обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = (f *_\tau \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y). \quad (4.85)$$

Функцию φ будем называть генератором обобщенных средних (4.85). Если $\varphi(x)$ — четный генератор, то согласно замечанию 2 почти всюду

$$\Phi_\varepsilon^\tau f(x) = \Phi_\varepsilon^T f(x) = (f *_T \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} T^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y).$$

В силу (4.83), (4.84)

$$\|\Phi_\varepsilon^\tau f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^\tau \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad (4.86)$$

$$\|\Phi_\varepsilon^T f\|_{p,d\mu_{k,a}} \leq M_{r,\lambda}^T \|\widehat{\varphi}_\varepsilon\|_{1,d\mu_{k,a}} \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}. \quad (4.87)$$

Исследуем L^p -сходимость обобщенных средних. Пусть

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau^y f - f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = \sup_{|y| \leq \delta} \|T^y f - f\|_{p,d\mu_{k,a}}$$

– модули непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Лемма 4. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} \leq (1 + M_{r,\lambda}^\tau) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} \leq (1 + M_{r,\lambda}^T) \|f\|_{p,d\mu_{k,a}}, \quad (4.88)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_T(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} = 0. \quad (4.89)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (4.66), получим (4.88). Равенство (4.89) докажем для модуля непрерывности $\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}}$. Второе равенство будет доказываться аналогично. Так как для $f, g \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$

$$|\omega_\tau(\delta, f)_{p,d\mu_{k,a}} - \omega_\tau(\delta, g)_{p,d\mu_{k,a}}| \leq (1 + M_{r,\lambda}^\tau) \|f - g\|_{p,d\mu_{k,a}},$$

равенство (4.89) можно доказывать для функций из плотного множества $S_{1/r}(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in S_{1/r}(\mathbb{R})$. Для нормированной функции Бесселя

$$j'_\lambda(z) = -\frac{z}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(z)$$

[98, гл. 5], поэтому $|j_\alpha(z) - 1| \leq \frac{|z|}{2(\lambda+1)}$ и из (11) $|B_{k,a}(y, z) - 1| \lesssim |yz|^{1/(2r)}$.

Так как $\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)$ быстро убывает на бесконечности, то согласно (4.56)

$$\begin{aligned} |\tau^y f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |B_{k,a}(x, z)| |B_{k,a}(y, z) - 1| |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a}(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |B_{k,a}(y, z) - 1| |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a}(z) \lesssim \int_{\mathbb{R}} |yz|^{\frac{1}{2r}} |\mathcal{F}_{k,a}(f)(z)| d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{\frac{1}{2r}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (4.89) при $p = \infty$.

Рассмотрим случай $p < \infty$. По свойству (4.76) теоремы 26 для всех y , $\tau^y f(x) \in S_{1/r}(\mathbb{R})$. Получим равномерные оценки по y . Для любого натурального m , $(\delta_{k,a})_z^m (B_{k,a}(y, z) \mathcal{F}_{k,a}(f)(z))$ является конечной линейной комбинацией функций вида $|y|^{\alpha_s} j_{\lambda+s}(2r|yz|^{1/2r}) f_s(z)$, $\alpha_s \geq 0$, $f_s \in S_{1/r}(\mathbb{R})$, и согласно (4.51)

$$|\tau^y f(x)| \lesssim |x|^{-m/r}, \quad |f(x)| \lesssim |x|^{-m/r}$$

равномерно по $|y| \leq 1$. Равенство (4.89) будет вытекать из оценки

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau^y f(x) - f(x)|^p d\mu_{k,a} \lesssim |y|^{p/(2r)} \int_{-\mathbb{R}} d\mu_{k,a} + \int_{|x| \geq R} |x|^{-mp/r} d\mu_{k,a}(x).$$

для достаточно больших m и $R > 0$. Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 28. Пусть $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,a}(\varphi)$, функции $\varphi, \widehat{\varphi} \in \mathcal{A}_{k,a}$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$ при $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(x) - \Phi_\varepsilon^\tau f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (4.86) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 28 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Если $f \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, то в силу (4.81)

$$\Phi_\varepsilon f(x) = (f *_{\tau} \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau^y f(x) \widehat{\varphi}_\varepsilon(y) d\mu_{k,a}(y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|f(x) - \Phi_\varepsilon f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)) \widehat{\varphi}(y) d\mu_{k,a}(y) \right\|_{p, d\mu_{k,a}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\tau^{\varepsilon y} f(x) - f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}(y)| d\mu_{k,a}(y) \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}(y)| d\mu_{k,a}(y). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 24 вытекает из (4.88), (4.89), и оценки

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \omega_\tau(\varepsilon y, f)_{p, d\mu_{k,a}} |\widehat{\varphi}(y)| d\mu_{k,a}(y) &\leq \omega_\tau(\varepsilon R, f)_{p, d\mu_{k,a}} \int_{|y| \leq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\mu_{k,a}(y) \\ &+ (1 + M_{r,\lambda}^\tau) \|f\|_{p, d\mu_{k,a}} \int_{|y| \geq R} |\widehat{\varphi}(y)| d\mu_{k,a}(y). \end{aligned}$$

Теорема 28 доказана.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 28 генератор φ — четный, то, учитывая неравенство (4.87),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(x) - \Phi_\varepsilon^T f(x)\|_{p, d\mu_{k,a}} = 0.$$

Обобщенные средние $\Phi_\varepsilon f$, для которых имеет место сходимость в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\mu_{k,a})$, $1 \leq p \leq \infty$, назовем регулярными.

В [102] для преобразования Данкля исследованы средние Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса. Все они порождены четными генераторами. Рассмотрим их аналоги для обобщенного преобразования Фурье при $a = 1/r$.

Напомним, что $\lambda = r(2k-1)$. Генератором обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса будет функция $\varphi(x) = e^{-r|x|^{1/r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Известно [90, теорема 5.1], что $\widehat{\varphi} = \varphi \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Следовательно, обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса регулярные.

Генератором обобщенных средних Пуассона будет функция $\varphi(x) = e^{-2r|x|^{1/2r}} \in \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$. Согласно [103, гл. 8, (8.6.4)] $\widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r} (1 + y^{1/r})^{-(\lambda+3/2)}$. Хотя $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{S}_{1/r}(\mathbb{R})$, но $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$ и обобщенные средние Пуассона также являются регулярными.

Для обобщенных средних Бохнера–Рисса

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - |x|^{\frac{1}{r}})^\delta, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \widehat{\varphi}(y) = c_{\lambda,r,\delta} j_{\lambda+\delta+1}(2r|y|^{\frac{1}{2r}}), \quad \delta > 0$$

(см. [103, гл. 8, (8.5.33)]). Генератор $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$. Из асимптотики функции Бесселя [98, гл. 7, 7.1] функция $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{k,1/r})$, если только $\delta > \delta_0 = \lambda + 1/2$. Число δ_0 называют критическим показателем. Если $\delta > \delta_0$, то обобщенные средние Бохнера–Рисса являются регулярными.

Глава 5

Теоретико числовые сетки и дифракция звуковых волн

5.1. Отражение сферической звуковой волны от упругого полупространства

Изучению распространения звуковых волн в присутствии плоских границ раздела сред посвящено большое количество работ. При этом в большинстве работ первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако часто возникает необходимость учитывать конечную удаленность источника звука от границ раздела сред. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоскую границу.

Задача о поле точечного источника, расположенного на конечном удалении от плоской границы раздела сред рассматривалась в ряде работ. Анализ отражения и преломления сферической волны на границе раздела двух однородных жидких и упругих полупространств проведен в [104, 105]. Задача об отражении сферической звуковой волны от плоскости, на которой заданы импедансные условия, решена в [106]. Отражение сферической звуковой волны от однородного вязкоупругого полупространством рассмотрено в [107].

В ряде работ исследовалось прохождение сферической звуковой волны через однородные изотропные упругие плоские слои. В [108, 109] исследовано прохождение сферической волны через тонкую бесконечную пластину, находящуюся в однородной жидкости. Взаимодействие сферической волны с однородной изотропной упругой пластиной конечной толщины и с двухслойной пластиной, состоящей из однородных и изотропных твердых слоев, изучено в [110, 111]. В [112] решена задача дифракции сферической волны на тонкой бесконечной пластине, разделяющей однородную и слоисто-неодородную среды. В [113] проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. В [114] построено точное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский однородный упругий слой. В качестве источника поля рассматривался сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Прохождение сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным изотропным упругим покрытием исследовано в [115].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении сферической звуковой

волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине слоем жидкости в случае произвольного закона неоднородности.

5.2. Постановка задачи

Пусть все пространство R^3 разделено плоскостями $z = 0$ и $z = h$ на три области: $D_1(z < 0)$, $D_2(0 < z < h)$, $D_3(z > h)$. Область D_1 — однородное упругое полупространство, которое характеризуется плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ и μ . Область D_2 представляет собой плоский слой идеальной неоднородной жидкости толщиной h , прилегающий к границе упругого полупространства $z = 0$. Полагаем, что плотность неоднородной жидкости ρ_2 является дифференцируемой функциями координаты z , а скорость звука c_2 — непрерывной функцией этой координаты. Область D_3 заполнена однородной идеальной жидкостью с плотностью ρ_3 и скоростью распространения звука c .

В области D_3 в точке $M_0(0, 0, z_0)$ расположен точечный излучатель гармонических звуковых волн. Звуковое давление гармонической сферической звуковой волны записывается в виде

$$p_0 = A \frac{\exp[i(kR - \omega t)]}{R}, \quad (5.1)$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число однородной жидкости; ω — круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и с точечным источником M_0 соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, отраженное упругим полупространством, покрытым неоднородным слоем жидкости.

5.3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном полупространстве в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [109]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (5.2)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad \text{div } \Phi = 0, \quad (5.3)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения частиц упругой среды \mathbf{u} ; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho_1}$ — скорости продольных и поперечных волн. При этом вектор смещения частиц упругого однородного полупространства

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi, \quad (5.4)$$

где

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы осей x, y и z прямоугольной декартовой системы координат.

Векторное уравнение 5.3 распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора Φ

$$\Delta\Phi_x + k_\tau^2\Phi_x = 0, \quad (5.5)$$

$$\Delta\Phi_y + k_\tau^2\Phi_y = 0,$$

$$\Delta\Phi_z + k_\tau^2\Phi_z = 0. \quad (5.6)$$

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора Φ будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца 5.5 и 5.6, а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения $\operatorname{div}\Phi = 0$, из которого следует

$$\frac{\partial\Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Согласно 5.4 компоненты вектора \mathbf{u} выражаются через функции Ψ, Φ_x, Φ_y и Φ_z по формулам

$$u_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}. \quad (5.8)$$

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [104]

$$\Delta p_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}p_2 - \frac{1}{\rho_2}\operatorname{grad}\rho_2 \cdot \operatorname{grad}p_2 = 0, \quad (5.9)$$

где p_2 — звуковое давление в неоднородном слое; $c_2 = c_2(z), \rho_2 = \rho_2(z)$.

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае гармонического движения описывается уравнением Гельмгольца [109]

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0, \quad (5.10)$$

где $p_1 = p_0 + p_s$ — звуковое давление полного акустического поля в области D_3 , p_s — звуковое давление в рассеянной волне.

Скорости частиц в однородной жидкости и в неоднородном слое определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega}\operatorname{grad}p_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{i\rho_2\omega}\operatorname{grad}p_2. \quad (5.11)$$

Решения дифференциальных уравнений 5.2, 5.5, 5.6, 5.9 и 5.10 должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях $z = 0$ и $z = h$, а также условиям излучения на бесконечности [109].

Граничные условия на поверхности полупространства $z = 0$ заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и неоднородной жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = 0 : \quad -i\omega u_z = v_{2z}, \quad \sigma_{zz} = -p_2, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (5.12)$$

На границе раздела однородной и неоднородной жидкостей $z = h$ должны быть равны нормальные скорости частиц жидкостей и акустические давления

$$z = h : \quad v_{1z} = v_{2z}, \quad p_1 = p_2. \quad (5.13)$$

Связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и составляющими вектора смещения \mathbf{u} в упругом полупространстве устанавливается на основе обобщенного закона Гука [116] и имеет вид

$$\sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (5.14)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений 5.2, 5.5, 5.6, 5.9 и 5.10, удовлетворяющих граничным условиям 5.12 и 5.13, а также дополнительным условиям — условиям излучения на бесконечности.

5.4. Аналитическое решение задачи

Представим давление падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [104, 105]

$$p_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5.15)$$

где

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i(\xi x + \eta y + \chi|z - z_0|)}, \quad \chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \quad (5.16)$$

При $z < z_0$ формула 5.16 принимает вид (волна падает на неоднородный слой, покрывающий полупространство)

$$\tilde{p}_0(\xi, \eta) = I(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y - \chi z)}, \quad I(\xi, \eta) = A \frac{i}{2\pi\chi} e^{i\chi z_0}. \quad (5.17)$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в 5.15, определяемое 5.17, аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на полупространство с неоднородным слоем. Акустическое давление такой волны записывается в виде

$$p_{0pl} = A_0 e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}, \quad (5.18)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_z = k \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора плоской волны \mathbf{k} на оси координат x , y , z ; $|\mathbf{k}| = k$; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы 5.17 и 5.18 находим, что ξ соответствует k_x , η — k_y , χ — k_z , а $I(\xi, \eta)$ — A_0 . Поэтому решение поставленной задачи можно найти, воспользовавшись решением задачи об отражении плоской звуковой волны от полупространства с прилегающим неоднородным слоем.

Действительно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, акустические давления в отраженной волне \tilde{p}_s и неоднородном слое

\tilde{p}_2 , потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в упругом полупространстве определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны p_{0pl} , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины p_s , p_2 , Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z подлежат определению путем интегрирования \tilde{p}_s , \tilde{p}_2 , $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$ по ξ и η в бесконечных пределах.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным жидким покрытием.

5.5. Отражение плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругое полупространство с прилегающим неоднородным слоем жидкости

Пусть из области $D_3(z > h)$ на полупространство, покрытым неоднородным слоем жидкости падает под произвольным углом плоская звуковая волна, давление в которой определяется выражением 5.18. Определим волновые поля в областях D_1 , D_2 и D_3 . Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl .

Потенциалы смещения в упругом полупространстве, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца 5.2, 5.5 и 5.6 будем искать в виде

$$\Psi_{pl} = B e^{i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)}, \quad (5.19)$$

$$\Phi_{xpl} = C e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (5.20)$$

$$\Phi_{zpl} = D e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}, \quad (5.21)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{lx} = k_{\tau x} = k_x$, $k_{ly} = k_{\tau y} = k_y$.

Подставим выражения 5.20 и 5.21 в 5.7 и проинтегрируем по y . Получим

$$\Phi_{ypl} = -\frac{1}{k_{\tau y}}(k_{\tau x}C - k_{\tau z}D)e^{i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)}. \quad (5.22)$$

Давление p_{2pl} является решением уравнения 5.9. Согласно закону Снеллиуса зависимость p_{2pl} от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_x x)$, а от координаты y — $\exp(ik_y y)$. Поэтому функцию p_{2pl} будем искать в виде

$$p_{2pl} = P(z)e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (5.23)$$

Подставляя выражение 5.23 в уравнение 5.9, получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $P(z)$

$$P''(z) + \alpha(z)P'(z) + \beta(z)P(z) = 0, \quad (5.24)$$

где $\alpha(z) = -\frac{\rho_2'(z)}{\rho_2(z)}$; $\beta(z) = \frac{\omega^2}{c_2^2(z)} - k_x^2 - k_y^2$.

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Давление в отраженной волне p_{spl} , являющееся решением уравнения Гельмгольца 5.10, будем искать в виде

$$p_{spl} = A_1 e^{i[k_x x + k_y y + k_z(z-h)]}. \quad (5.25)$$

Подставляя 5.18 – 5.23 и 5.25 в граничные условия 5.12 и 5.13 и учитывая 5.8, 5.11 и 5.14, получим выражения для неизвестных коэффициентов A_1, B, C, D

$$A_1 = -A_0 e^{-ik_z h} + P(h), \quad (5.26)$$

$$B = \frac{a_9 d_1}{\Delta} P(0), \quad C = -\frac{a_9 d_2}{\Delta} P(0), \quad D = \frac{-a_7 d_1 + a_8 d_2}{\Delta} P(0) \quad (5.27)$$

и два краевых условия для дифференциального уравнения 5.24

$$\begin{aligned} P'(0) + \gamma_1 P(0) &= 0, \\ P'(h) + \gamma_2 P(h) &= g, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{k_{\tau y} \Delta}; \quad \gamma_2 = \frac{ik_z \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad g = 2A_0 e^{-ik_z h} \gamma_2; \quad \Delta = (a_1 a_9 - a_7 a_3) d_1 - (a_2 a_9 - a_8 a_3) d_2;$$

$$a_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_{lz}^2; \quad a_2 = -\frac{k_{\tau z}}{k_{\tau y}} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2); \quad a_3 = \frac{k_{\tau x} k_{\tau z}^2}{k_{\tau y}}; \quad a_4 = 2k_{lx} k_{lz} k_{\tau y};$$

$$a_5 = k_{\tau x} (k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2); \quad a_6 = k_{\tau z} (-k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 + k_{\tau z}^2); \quad a_7 = 2k_{ly} k_{lz};$$

$$a_8 = k_{\tau x}^2 + k_{\tau y}^2 - k_{\tau z}^2; \quad a_9 = -2k_{\tau x} k_{\tau z}; \quad d_1 = a_5 a_9 - a_8 a_6; \quad d_2 = a_4 a_9 - a_7 a_6.$$

Коэффициенты A_1, B, C, D выражаются через значения функции $P(z)$ на концах отрезка $[0, h]$. Поэтому для их вычисления необходимо прежде всего решить краевую задачу 5.24, 5.28.

Найдем приближенное аналитическое решение краевой задачи 5.24, 5.28 методом степенных рядов [117].

Аппроксимируем функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ многочленами относительно переменной z

$$\alpha(z) = \sum_{m=0}^M \alpha_m (z - h/2)^m, \quad \beta(z) = \sum_{m=0}^M \beta_m (z - h/2)^m, \quad (5.29)$$

где M — степень многочлена.

Решение линейного уравнения с переменными коэффициентами 5.24 будем искать в виде

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (z - h/2)^n. \quad (5.30)$$

Если коэффициенты уравнения 5.24 $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — многочлены, то степенной ряд 5.30 будет сходиться при любом значении z из отрезка $[0, h]$ [117].

Производные $P'(z)$ и $P''(z)$ согласно 5.30 запишем в виде

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1} (z - h/2)^n,$$

$$P''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)P_{n+2}(z-h/2)^n. \quad (5.31)$$

Тогда

$$\alpha(z)P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} (n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m} \right] (z-h/2)^n, \quad (5.32)$$

$$\beta(z)P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M_1} \beta_m P_{n-m} \right] (z-h/2)^n, \quad (5.33)$$

где $M_1 = \min(M, n)$.

Подставляя выражения 5.31 – 5.33 в уравнение 5.24 и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени $(z-h/2)$, получаем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов P_n

$$P_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m} + \beta_m P_{n-m}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.34)$$

которое позволяет вычислить все коэффициенты разложения 5.30 за исключением P_0 и P_1 .

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу 5.24, 5.28 к задачам с начальными условиями в точке $z = h/2$. Найдем два линейно независимых решения дифференциального уравнения 5.24. В качестве фундаментальных решений можно выбрать два решения задачи Коши $P^{(1)}(z)$ и $P^{(2)}(z)$ уравнения 5.24 с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} P^{(1)}|_{z=h/2} &= 1, & P^{(1)'}|_{z=h/2} &= 0, \\ P^{(2)}|_{z=h/2} &= 0, & P^{(2)'}|_{z=h/2} &= 1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Однородность уравнения 5.24 позволяет представить решение краевой задачи 5.24, 5.28 в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$P(z) = T_1 P^{(1)}(z) + T_2 P^{(2)}(z), \quad (5.36)$$

где T_1 и T_2 — постоянные.

Функции $P^{(l)}(z)$ ($l = 1, 2$) будем искать в виде 5.30

$$P^{(l)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(l)}(z-h/2)^n \quad (l = 1, 2). \quad (5.37)$$

Все коэффициенты разложений 5.37 за исключением $P_0^{(l)}$ и $P_1^{(l)}$ ($l = 1, 2$) вычисляются по формуле 5.34

$$P_{n+2}^{(l)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{M_1} [(n+1-m)\alpha_m P_{n+1-m}^{(l)} + \beta_m P_{n-m}^{(l)}], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.38)$$

Подставляя 5.37 в начальные условия 5.35, находим

$$P_0^{(1)} = 1, \quad P_1^{(1)} = 0, \quad P_0^{(2)} = 0, \quad P_1^{(2)} = 1.$$

Подставляя 5.36 в краевые условия 5.28, получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных T_1 и T_2

$$c_{11}T_1 + c_{12}T_2 = 0,$$

$$c_{21}T_1 + c_{22}T_2 = g,$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= P^{(1)'}(0) + \gamma_1 P^{(1)}(0); & c_{12} &= P^{(2)'}(0) + \gamma_1 P^{(2)}(0); \\ c_{21} &= P^{(1)'}(h) + \gamma_2 P^{(1)}(h); & c_{22} &= P^{(2)'}(h) + \gamma_2 P^{(2)}(h). \end{aligned}$$

Определив из этой системы коэффициенты T_1 и T_2 , получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи 5.24,5.28

$$P(z) = \frac{c_{12}}{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}} \left[c_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(z - h/2)^n - c_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(z - h/2)^n \right]. \quad (5.39)$$

5.6. Отражение сферической волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого выражением $\tilde{p}_0(\xi, \eta)$, соответствующие величины \tilde{p}_s , \tilde{p}_2 , $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$ и $\tilde{\Phi}_z$ определяются формулами 5.19–5.23, полученными при решении задачи в случае падения плоской волны давления p_{0pl} , в которых следует сделать замену k_x на ξ , k_y на η , k_z на χ , A_0 на $I(\xi, \eta)$.

Искомое акустическое давление в рассеянной волне p_s определяется путем интегрирования \tilde{p}_s

$$p_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_s(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Аналогичным образом путем интегрирования находятся p_2 , Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z . Будем иметь

$$p_s(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} + \tilde{P}(h) \right] e^{i[\xi x + \eta y + \chi(z-h)]} d\xi d\eta, \quad (5.40)$$

где

$$\tilde{P}(h) = \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21} - \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} \left[\tilde{c}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(h/2)^n - \tilde{c}_{11} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(2)}(h/2)^n \right];$$

$$\tilde{c}_{11} = P^{(1)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(1)}(0); \quad \tilde{c}_{12} = P^{(2)'}(0) + \tilde{\gamma}_1 P^{(2)}(0);$$

$$\tilde{c}_{21} = P^{(1)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(1)}(h); \quad \tilde{c}_{22} = P^{(2)'}(h) + \tilde{\gamma}_2 P^{(2)}(h);$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{i\omega^2 \rho_2(0)}{\eta \tilde{\Delta}}; \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{i\chi \rho_2(h)}{\rho_1}; \quad \tilde{g} = 2I(\xi, \eta)e^{-i\chi h} \tilde{\gamma}_2;$$

$$\tilde{\Delta} = (\tilde{a}_1 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_7 \tilde{a}_3) \tilde{d}_1 - (\tilde{a}_2 \tilde{a}_9 - \tilde{a}_8 \tilde{a}_3) \tilde{d}_2;$$

$$\tilde{a}_1 = -\lambda k_l^2 - 2\mu k_1^2; \quad \tilde{a}_2 = -\frac{1}{\eta}(\xi^2 + \eta^2)k_2; \quad \tilde{a}_3 = \frac{\xi}{\tau}k_2^2; \quad \tilde{a}_4 = 2\xi\eta k_1; \quad \tilde{a}_5 = \xi(\xi^2 + \eta^2 - k_2^2);$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_6 &= k_2(k_\tau^2 - 2\xi^2); & \tilde{a}_7 &= 2\eta k_1; & \tilde{a}_8 &= \xi^2 + \eta^2 - k_2^2; & \tilde{a}_9 &= -2\xi k_2; \\ \tilde{d}_1 &= \tilde{a}_5\tilde{a}_9 - \tilde{a}_8\tilde{a}_6; & \tilde{d}_2 &= \tilde{a}_4\tilde{a}_9 - \tilde{a}_7\tilde{a}_6; & k_1 &= \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2}, & k_2 &= \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}.\end{aligned}$$

Чтобы обеспечить ограниченность \tilde{p}_s при $z \rightarrow \infty$ выбор знака корня $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ осуществим из условия $\text{Im}\chi \geq 0$, то есть $\chi = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 < k^2$, $\chi = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 > k^2$.

Величины k_1 и k_2 определяются по формулам
 $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \eta^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 < k_l^2$, $k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_l^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 > k_l^2$;
 $k_1 = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \eta^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 < k_\tau^2$, $k_2 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k_\tau^2}$ при $\xi^2 + \eta^2 > k_\tau^2$.

Оценить аналитически интеграл 5.40 не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету.

5.7. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины

Тело, имеющее форму конечного цилиндра, хорошо аппроксимирует многие реальные объекты и элементы конструкций. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах. Конечные цилиндрические рассеиватели звука изучены в гораздо меньшей степени.

В [118] найдено приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на жестком цилиндре конечной длины в случае, когда длина цилиндра много больше длины волны. Рассеяние плоской звуковой волны конечной упругой цилиндрической оболочкой и конечным упругим сплошным круговым цилиндром изучено в [119, 120]. В [121] экспериментально определено сечение обратного рассеяния сплошного упругого цилиндра конечной длины в водной среде при широком диапазоне изменения длины и радиуса цилиндра. Рассеяние звука упругим сплошным цилиндром, ограниченным на концах полусферами рассмотрено в [122]. Работы [123, 124] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [127] построена приближенная формула для давления акустического поля, рассеянного конечным импедансным цилиндром, в дальней зоне. В [128] изучено рассеяние акустических полей упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины. В [129] исследованы некоторые особенности рассеяния звука упругими цилиндрическими оболочками с полусферическими законцовками. В [130, 131] получена формула для звукового давления поля, рассеянного конечным сплошным цилиндром, в дальней зоне. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрические рассеиватели являются однородными изотропными телами. Рассеяние плоской звуковой волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием исследовано в [132].

В настоящей работе решается задача дифракции плоских звуковых волн на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины.

5.8. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины L . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус – r_1 ($r_1 < L$), а внутренний – r_0 . Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$ (рис. 5.1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Полагаем, что в полости цилиндрической оболочки – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

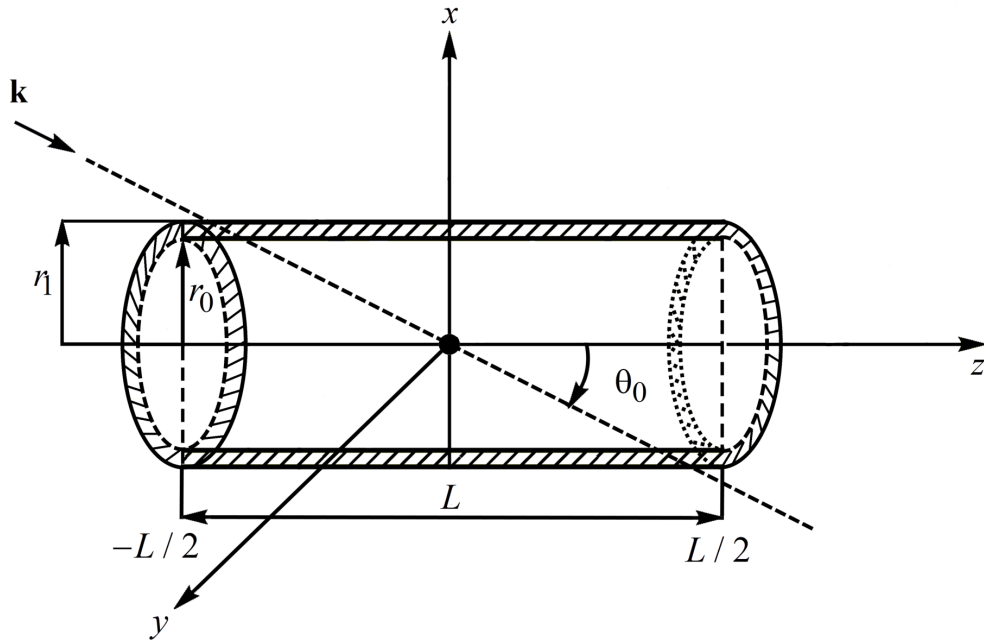


Рис. 5.1: Геометрия задачи

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} , который лежит в плоскости xz и образует угол θ_0 с положительным направлением оси z .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t], \quad (5.41)$$

где A – амплитуда волны; ω – круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0, 0, k \cos \theta_0)$ – волновой вектор; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; $k = |\mathbf{k}|$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой.

5.9. Аналитическое решение

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [133]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0,$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_S$ – потенциал скорости полного акустического поля; Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [134]

$$\Psi_0 = A \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi), \quad (5.42)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (5.43)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im } k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности [133] для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [135]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где u_r , u_φ , u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [135], соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\
\sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\
\sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{5.45}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Будем считать, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [132]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \tag{5.46}$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\
u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi),
\end{aligned} \tag{5.47}$$

где $k_q = \pi q/L$. Выбор функций u_r , u_φ , u_z в виде 5.47 обеспечивает выполнение условий 5.46.

Подставляя разложения 5.47 в уравнения 5.44 с учетом 5.45, получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \widehat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \widehat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \tag{5.48}$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned}
a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0, \quad (p \neq m), \\
b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu) r, & b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu) r^2, \\
b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0, & b_{nq31} &= k_q(\lambda + \mu) r^2, \\
c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{nq12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, \\
c_{nq21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu), & c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu(2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), \\
c_{nq23} &= -ink_q(\lambda + \mu) r, & c_{nq31} &= k_q(\mu' r + \lambda + \mu) r, \\
c_{nq32} &= ink_q(\lambda + \mu) r, & c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$ разложения 5.43 и функции $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ в разложениях 5.47 подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.49)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.50)$$

Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh.$$

Используя формулу [136]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей звуковой волны, определяемого 5.42

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0(h) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \delta(h - \alpha), \\ \Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_0(h) dh. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(h) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi), \\ u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где

$$\begin{aligned} g_q(h) &= (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)}}{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)}}{k_q^{(-)}} \right], \\ k_q^{(+)} &= (hL + \pi q) / 2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q) / 2. \end{aligned}$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ с учетом 5.43, 5.51, 5.52 находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[A i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (5.53)$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

Подставим во второе граничное условие 5.49 выражения 5.42, 5.43 и 5.47, домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате, учитывая выражение для вронскиана [137], получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{(r_1)} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi\omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (5.54)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh. \quad (5.55)$$

Подробный анализ интеграла вида 5.55 приведен в работе [132].

Из третьего и четвертого граничных условий 5.49 с учетом 5.45 находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0, \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Из граничных условий 5.50 получим следующие краевые условия для системы 5.48:

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (5.57)$$

где $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} f_{nq11} &= \lambda(r)/r, & f_{nq12} &= in\lambda(r)/r, & f_{nq13} &= -\lambda(r)k_q, \\ f_{nq21} &= in\mu(r)/r, & f_{nq22} &= -\mu(r)/r, & f_{nq23} &= f_{nq32} = f_{nq33} = 0, & f_{nq31} &= k_q\mu(r). \end{aligned}$$

Построенная краевая задача 5.48, 5.54, 5.56, 5.57 может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [127]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (5.58)$$

где \mathbf{R}_2 – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$.

Применение формулы 5.58 вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [134]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(\xi) d\xi, \quad (5.59)$$

где

$$\tilde{G}_o(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_2)] \begin{cases} H_m(\eta r_2) J_m(\eta r), & r < r_2; \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2. \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Подставляя 5.43, 5.51, 5.59 в 5.58 с учетом 5.53 и формулы [127]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ лежит внутри } [a, b],$$

а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_S

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (5.60)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{Ai^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)}, \quad W_{2n} = Ai^n \beta J'_n(\beta r_1),$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi) z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi,$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi) z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi,$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi) z_2] g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi.$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение 5.60 удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению 5.43, в интегралах I_{1n} , I_{2n} , I_{3nq} , I_{4nq} следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Интегралы, входящие в 5.60, подлежат вычислению каким-либо численным методом. Для вычисления интегралов по переменным h , ξ может быть применен прием обрезания бесконечных пределов и интегрирование по вещественной прямой заменено интегрированием по конечному отрезку.

5.10. Построение теоретико-числовой сетки

Для вычисления интегралов из выражения потенциала рассеянного поля 5.60 вне поверхности тела использовались два метода:

- метод (А), основанный на последовательном интегрировании по квадратурной формуле трапеций ;
- метод (В) на основе квадратурных формул по параллелепедальным сеткам Коровова.

Интегрирование по квадратурной формуле трапеций (метод А) является классическим методом численного интегрирования и подробно изложен, например, в [138].

Интегрирование по методу (В) сводится к построению параллелепедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ состоящей из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

где N — количество узлов параллелепедальной сетки; \vec{a} — набор оптимальных коэффициентов. Данный метод и способы периодизации интегрируемых функций подробно изложены в [141].

В данной работе применяется простейшая периодизация, предложенная в работе [142], позволяющая далее применять Фурье-интерполяцию.

5.11. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости $|\Psi_S/A|$ от координаты φ в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$. В этом случае интегралы из 5.60 принимают вид

$$\begin{aligned}
I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (\alpha - \xi) z_2] \eta J_n' (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 d\xi, \\
I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (\alpha - \xi) z_2] J_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 d\xi, \\
I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (h - \xi) z_2] \frac{H_n (k_h r_1)}{k_h H_n' (k_h r_1)} g_q (h) \eta J_n' (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 dh d\xi, \\
I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp [i (h - \xi) z_2] g_q (h) J_n (\eta r_1) H_n (\eta r_*) dz_2 dh d\xi. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбутираля ($r_1 = 1$ м, $r_0 = 0.5$ м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривалась как однородная цилиндрическая оболочка с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ н/м², так и неоднородная, физико-механические характеристики которой изменялись по закону

$$\lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 \cdot f(r),$$

$$f(r) = 0.75 [(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1], \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Расчеты выполнены при волновом размере тела $kr_1 = 4$, угле падения $\theta_0 = \pi/2$, для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи 5.48, 5.54, 5.56, 5.57 получено методом сплайн-коллокации [139].

Суммирование в 5.60 проводилось в диапазоне от $-S$ до S по индексу n и от 1 до S по индексу q , где $S = 2 [kr_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Вычисления интегралов (5.61) проводилось двумя методами (А и В): последовательным интегрированием по квадратурной формуле трапеций [138] на равномерной сетке и по квадратурной формуле на основе параллелепедальной сетки Коробова [141]. При расчетах по формуле трапеций использовались следующие параметры: $M_1 = 2 (W \times L) / h_1^2$, $M_2 = 4 (W \times Q \times L) / h_2^3$ – число узлов сеток для расчета двойных и тройных интегралов из (5.61) соответственно, h_1 и h_2 – шаги этих сеток.

В первой серии численных экспериментов определялись параметры M_1 , M_2 , N_1 , N_2 сеток разбиения методов А и В так, чтобы обеспечивалась достаточная точность вычисления $\Psi_S(\varphi)$. Через N_1 , N_2 обозначено количество узлов параллелепедальных сеток для вычисления двойных и тройных интегралов соответственно. С целью подбора оптимальных параметров сеток использовалось предположение, сделанное на основании работы [132], что при $L/r_1 \gg 1$ поле $\Psi_S(\varphi)$, рассеянное цилиндрической оболочкой конечной длины, должно совпадать с рассеянным полем $\Psi_S^{(\infty)}(\varphi)$, полученным при дифракции на цилиндрической оболочке бесконечной длины. Решение задачи рассеяния

плоской звуковой волны однородной упругой цилиндрической оболочкой бесконечной длины получено в работе [140], не содержит интегралов и может служить базой при выборе параметров M_1 , M_2 , N_1 , N_2 . При этом степень согласованности результатов оценивалась величинами

$$R_A = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi, \quad R_B = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(B)}(\varphi) - \Psi_S^{(\infty)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

В результате было получено, что для достижения ошибки $R_A, R_B < 10^{-6}$ следует выбрать значения $M_1 = 3.2 \cdot 10^5$, $M_2 = 5.12 \cdot 10^6$, $N_1 = 96077$ ($a = 35489$), $N_2 = 907956$ ($a_1 = 178379$, $a_2 = 657577$). В скобках указаны значения оптимальных коэффициентов \vec{a} .

Следует отметить, что вычисление интегралов (5.61), входящих в 5.60, сопряжено с некоторыми трудностями, связанными с тем, что цилиндрическая функция Ганкеля первого рода $H_n(x)$ при $x = 0$ имеет полюс n -го порядка при $n \neq 0$ и логарифмическую особенность при $n = 0$. При численных расчетах интегралов (5.61) отрезки интегрирования по переменным ξ , h разбивались на участки $(-Y, -k - \varepsilon)$, $(-k - \varepsilon, -k + \varepsilon)$, $(-k + \varepsilon, k - \varepsilon)$, $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$, $(k + \varepsilon, Y)$, где $Y = W, Q$ соответственно, $\varepsilon > 0$ малый параметр. На участках $(\pm k - \varepsilon, \pm k + \varepsilon)$ цилиндрические волновые функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n , а также их производные заменялись асимптотическими формулами при малых значениях аргумента [137], так как в окрестностях точек ξ , $h = \pm k$ значения η , k_h малы.

На рис. 5.2-5.4 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Штриховые линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Сравнение кривых на рис. 5.3 и 5.4 показывает, что при достаточно больших значениях L/r_1 поведение амплитуды рассеяния звука отличается незначительно.

Важно отметить, что штриховая кривая на рис. 5.4, построенная для случая однородной упругой оболочки при $L/r_1 = 100$, полностью повторяет кривую, построенную с использованием аналитического решения из [140], что позволяет сделать вывод о корректности используемых методов численного интегрирования. Установлено, что пределы интегрирования W , Q имеют сильную зависимость от значения волнового числа внешней области k , поэтому для различных значений частоты падающей волны ω следует подбирать параметры сеток индивидуально, основываясь на величинах R_A, R_B .

Отметим, что используемые параметры N_1 , N_2 , M_1 , M_2 обеспечивают достаточное совпадение результатов, полученных двумя методами (А и В) вычисления интегралов (5.61), где согласованность результатов оценивалась величиной

$$R = \int_0^{2\pi} \left| \Psi_S^{(A)}(\varphi) - \Psi_S^{(B)}(\varphi) \right|^2 d\varphi.$$

Поэтому на диаграммах построено только по одной линии для каждого набора входных геометрических и физико-механических параметров.

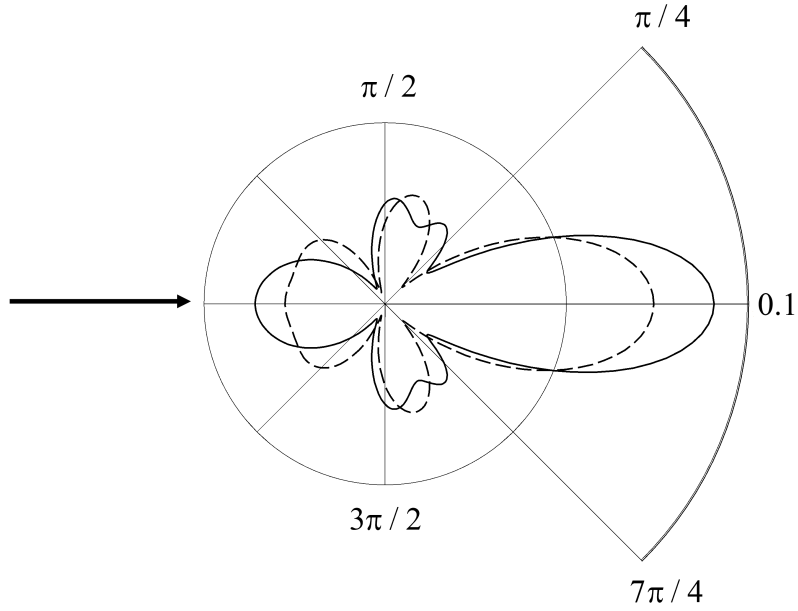


Рис. 5.2: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 5$.

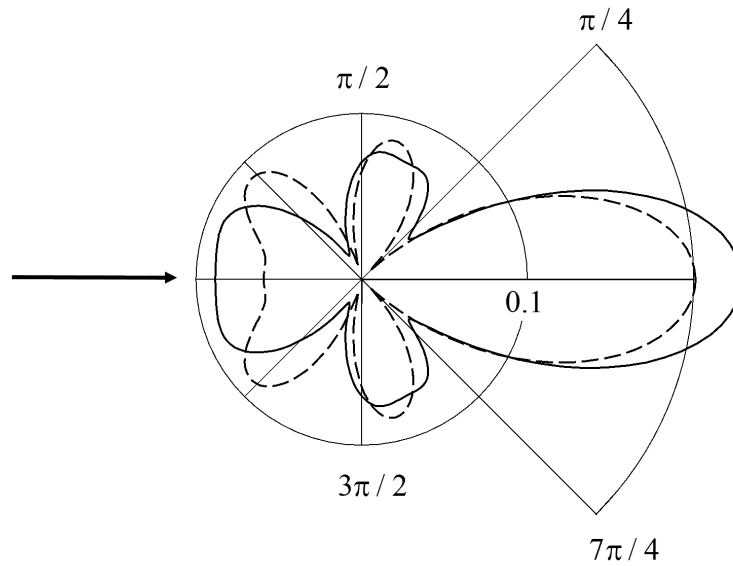


Рис. 5.3: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 50$.

Заметим, что отношение числа точек $M_1/N_1 \approx 3.33$, $M_2/N_2 \approx 5.63$, однако уменьшение времени расчета всей диаграммы на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ методом В - t_B по отношению к t_A составляет только 10-12% для двойных и 14-17% для тройных интегралов.

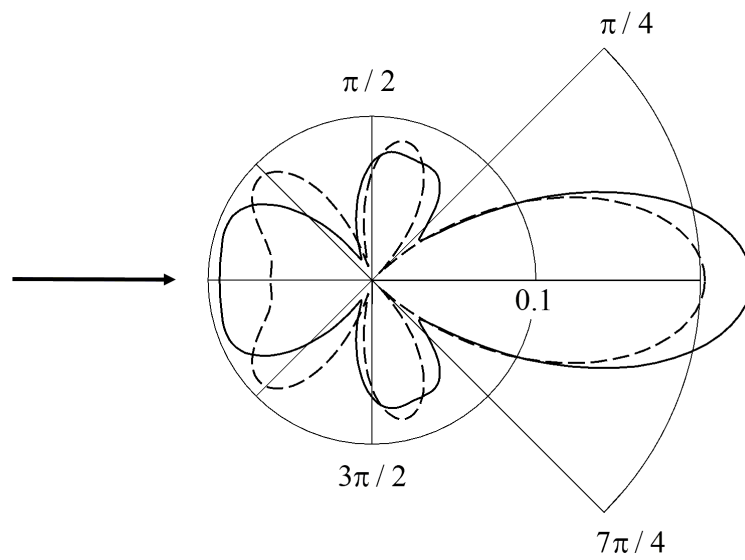


Рис. 5.4: Диаграммы направленности рассеянного поля, $L/r_1 = 100$.

Заключение

Из выше изложенных глав можно сделать как фундаментальные выводы, так и выводы о дальнейшем прикладном применении полученных результатов.

Из доказанных в главе 1 теорем возникает вопрос о справедливости их на пространстве всех диагональных решёток. Определение обобщённой параллелепипедальной сетки не даёт простого представления того, каким образом её строить. В данной работе предложен алгоритм построения обобщённых параллелепипедальных сеток, соответствующих целочисленным решёткам.

С вопросами построения параллелепипедальных сеток связаны вопросы нахождения оптимальных алгоритмов построения абсолютно минимальной полной гиперболической системы вычетов и гиперболических параметров решётки. Эти задачи решаются в сотрудничестве с кафедрой математических и компьютерных методов анализа Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством Чубарикова В. Н.

Оценка, полученная в главе 2, точнее чем общая оценка работы [16], обобщающей результаты В. А. Быковского [15]. Что позволяет более точно изучить вопрос приближения алгебраических решёток, решётками линейного сравнения, изучая асимптотику соответствующих гиперболических дзета-функций.

В работе [41] дается достаточно подробный обзор работ [12] — [40], связанных с данной тематикой.

Также из результатов главы 2 видно, что если последовательность вложенных решёток решений линейных сравнений обладает тем свойством, что последовательность третьих гиперболических параметров стремится к бесконечности, то мы получаем мультипликативный, концентрический алгоритм приближенного интерполирования с правилом останова, который дает последовательность интерполяционных многочленов, сходящихся к интерполируемой функции.

Было бы интересно найти аналоги оценок Быковского (см. [45], [16]) для задачи интерполирования.

Результаты этой главы показывают качество теоретико-числовой интерполяции по полным системам вычетов, которая существенно отличается от других способов интерполяции функции многих переменных, в том числе возможностью сведения задачи многомерной интерполяции к одномерной.

Результаты главы 3 просты и лаконичны и носят, как фундаментальный характер, так и прикладной. Реализована библиотека численного интегрирования по теоретико-числовым сеткам. Используемые алгоритмы эффективнее классических при исследовании распространения плоских волн в пространстве. Впервые в мире задача многомерной интерполяции сведена к одномерной, что интересно как с фундаментальной точки зрения, так и с практической, так как позволяет строить интерполяционный многочлен от

N гармоник за $O(N \ln(N))$ операций в многомерном случае.

В главе 4 изложены такие свойства обобщенного преобразования Ганкеля, как инвариантное подпространство из быстро убывающих на бесконечности функций, дифференциально-разностный оператор, для которого ядро является собственной функцией, операторы обобщенного сдвига, свертки, обобщенные средние и их сходимость в пространствах L^p и почти всюду. Все это говорит о начале построения гармонического анализа в пространствах L^p на прямой со степенным весом, зависящим от двух параметров (k, a) , для которых $a = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$, $k > 1/2 - 1/(4r)$. В дальнейшем в этих пространствах нужно будет исследовать аппроксимативные свойства обобщенных средних, модельные интегральные операторы такие, как потенциал Рисса и преобразование Рисса.

Так же в главе изложены свойства одномерного (k, a) -обобщенного преобразования Фурье.

Эти результаты крайне важны при применении теории приближений и гармонического анализа в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

В главе 5 решаются новые задачи по распространению плоских акустических волн с применением теоретико-числовых сеток.

Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией поверхностей полупространства и жидкого слоя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Поэтому для получения аналитического решения задачи отражения сферической звуковой волны от упругого полупространства с прилегающим непрерывно-неоднородным по толщине плоским слоем жидкости применен метод, использующий решение аналогичной задачи в случае падения плоской волны. Такой подход к решению поставленной задачи позволил избежать необходимости непосредственного решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями. Найденное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

Сравнение двух подходов приближенного вычисления интегралов показывает, что для получения погрешности в решении, не превышающей 10^{-6} по абсолютной величине, при использовании второго метода можно получить сокращение времени всех расчетов, за счет вычислений интегралов, от 10% до 12% для двойных и от 14% до 17% для тройных интегралов.

Установлено, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Использование теоретико-числовых сеток при решении задач механики может обеспечить повышение эффективности процедур вычисления интегралов, в частности в задачах о рассеянии звуковых волн упругими телами на основе представления акустического поля в форме Гельмгольца-Кирхгофа.

Полученные фундаментальные и прикладные результаты говорят об обоснованности продолжения исследований по выделенным направлениям.

Так же они ставят необходимую прикладную задачу - реализация библиотеки численного интерполирования функций многих переменных по теоретико-числовым сеткам. А в рамках исследований в области акустики решение задачи об интерполяции функции описывающей распространение звуковых волн, значения которой измеряются датчиками в узлах параллелепедальной сетки, по различным системам функций — тригонометрическим гармоникам и сферическим гармоникам. Здесь естественен вопрос о

переносе полученных результатов на распространение электромагнитных волн. Особо была бы интересна реализация изучаемых методов интерполяции в "металле".

Список использованных источников

1. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физматгиз, 1963.
4. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.
5. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)
6. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
7. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
8. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.
9. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.
10. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
11. J. W. S. Cassels. An Introduction to the Geometry of Numbers. 345 pp.
12. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
13. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.
14. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.
15. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
16. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

17. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.
18. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.
19. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.
20. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.
21. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
22. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41–48.
23. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
24. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 – 25.
25. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 – 1210.
26. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009–1012.
27. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
28. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 – 90.
29. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
30. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39–40.
31. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.

32. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
33. Мельников О. В., Ремеслеников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с. — (Справ. мат. б-ка).
34. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.
35. Огородничук Н. К., Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.
36. Огородничук Н. К., Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.
37. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms for computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20–26, 2012. p. 22 — 24.
38. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.
39. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.
40. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 22–29.
41. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.
42. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
43. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4–109.
44. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 136(178). 4(8). 1988. С. 451–467

45. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
46. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5. Вып. 1(9). С. 82–113.
47. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 2(4). С. 43 – 59.
48. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
49. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО 2006. С. 189 – 198
50. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
51. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
52. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.
53. Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 178–187.
54. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
55. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
56. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
57. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
58. Н. С. Бахвалов. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
59. Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Применение параллелепипедальных сеток Коробова в задачах акустики // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов Международной конференции "Алгебра и динамические системы посвященной 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова, Нальчик. — Нальчик: Издательство "Принт-центр 2022, с.45-47

60. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник, 2021. Том. 22, № 3. С. 368–38
61. Н. М. Коробов. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
62. Быстрое вычисление параметров параллелепедальных сеток для интегрирования и интерполирования // ПОИВС. 2022. URL: <http://poivs.tsput.ru/ru/Count/TMK/HFunctionCalc2>. (Дата обращения 23.01.2024)
63. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, Yu. A. Basalov, E. D. Rebrov , Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation Part of the Lecture Notes in Networks and Systems book series (LNNS, volume 702) // https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-34127-4_16
64. Родионов А.В., Добровольский М.Н., Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник, 2023, 24(3) С. 95-121.
65. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радиоисвязь, 1985.
66. Н. М. Добровольский, Н. Л. Клепикова, Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов, Препринты ИПФ АН СССР, 1990, №63, 29 с.
67. Н. М. Коробов, О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР, 1982, Т. 267, №2, с. 289–292.
68. Л. П. Бочарова, В. С. Ванькова, Н. М. Добровольский, О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки, 1991, Т. 49, №2, с. 23–28.
69. Rader C. Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Points is Prime // Proc. IEEE 56, 1968, pp. 1107-1108.
70. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.
71. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
72. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a) -Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
73. Иванов В.И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.
74. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.
75. Boubatra M. A., Negzaoui S., Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // Integral Transforms Spec. Funct. 2022. Vol. 33, no. 3. P. 247–263.

76. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с.
77. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. Uncertainty principles for eventually constant sign bandlimited functions // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2020. Vol. 52, no. 5. P. 4751-4782.
78. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
79. Mejjaoli H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // *Int. J. Reprod. Kernels*. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 1–39.
80. Mejjaoli H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // *Mediterr. J. Math*. 2023. Vol. 20, no. 3. Article 186.
81. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
82. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // *J. d'Analyse. Math*. 2005. Vol. 97. P. 25–55.
83. Grafacos L. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 489 p.
84. Ben Saïd S., Negzaoui S. Norm inequalities for maximal operators // *Journal of Inequalities and Applications*. 2022. Article number: 134. <https://doi.org/10.1186/s13660-022-02874-1>.
85. Чертова Д. В. Теоремы Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ со степенным весом // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. 2009. Вып. 3. С. 100–116.
86. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
87. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. 196 с.
88. Dunkl C.F. Integral kernels with reflection group invariance // *Canad. J. Math*. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.
89. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in *Orthogonal Polynomials and Special Functions* // *Lecture Notes in Math*. 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
90. Ben Saïd S., Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // *Compos. Math*. 2012. Vol. 148, iss. 4. P. 1265–1336.
91. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a) -Generalized Fourier transform // *Forum of Math., Sigma*. 2023. Vol. 11, e72. <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
92. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p; q)$ // *Memoirs of the American Mathematical Societies*. 2011. Vol. 213, iss. 1000. 132 p.
93. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // *Int. Math. Res. Notices*. 2016. Vol. 2016, iss. 23. P. 7179–7200.
94. Boubatra M. A., Negzaoui S, Sifi M. A new product formula involving Bessel functions // *Integral Transforms Spec. Funct*. 2022. Vol. 33, iss. 3. P. 247–263.

95. Mejjali H. Deformed Stockwell transform and applications on the reproducing kernel theory // *Int. J. Reprod. Kernels*. 2022. Vol. 1, iss. 1. P. 1–39.
96. Mejjali H., Trimèche K. Localization Operators and Scalogram Associated with the Deformed Hankel Wavelet Transform // *Mediterr. J. Math*. 2023. Vol. 20, iss. 3. Article 186.
97. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive Lp -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // *Constr. Approx.* 2019. Vol. 49, iss. 3. P. 555–605.
98. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с. %%% Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, 804 p. % ISBN 0521483913, 9780521483919.
99. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М.: Наука, 1966. 297 с. %%% Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, New York, McGraw Hill Book Company, 1953, 414 p. % ISBN 0486446158, 9780486446158.
100. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196. %%% Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. % doi: 10.1070/IM2007v071n05ABEH002379 .
101. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Том 1. М.: Наука, 1975. 656 с. %%% Hewitt E., Ross K.A. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag, 2012, 525 p. % ISBN 1441986383, 9781441986382.
102. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // *J. d'Analyse. Math.* 2005. Vol. 97. P. 25–55.
103. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. М.: Наука, 1970. 328 с. %%% Bateman H., Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, New York, McGraw Hill Book Company, 1954, 451 p. % ISBN 0070195501, 9780070195509.
104. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
105. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
106. Ingard U. On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane // *J. Acoust. Soc. Am.* 1951. Vol. 23. No. 3. P. 329 – 335.
107. Magnuson A.H. Acoustic response in a liquid overlying a homogeneous viscoelastic half-space // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. Vol. 57. No. 5. P. 1017 – 1024.
108. Lamb Jr. The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate // *Ann. Phys.* 1957. Vol. 1. No. 3. P. 233 – 246.
109. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
110. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
111. Piquette J. C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 84. No. 4. P. 1526 – 1535.

112. Куртепов В.М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // Акуст. журн. 1969. Т. 15. Вып 4. С. 560 – 566.
113. Шендеров Е.Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 800 – 807.
114. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика. 2014. Вып. 2. С. 36 – 48.
115. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш.. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.
116. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
117. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1969. 656 с.
118. Williams W. E., Lighthill M. J. Diffraction by a cylinder of finite length // Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V.52. no. 2. P. 322-335.
119. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271-273.
120. Лямшев Л. М. Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 1. С. 51-58.
121. Андреева И. Б., Самоволькин В. Г. Рассеяние звука упругими цилиндрами конечной длины // Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 5. С. 637-643.
122. Su J.-H., Varadan V. V., Varadan V. K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68, No 2. P. 686-691.
123. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // Акустический журнал/ 1986. Т. 32. № 1. С. 129-131.
124. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 5. С. 699-701.
125. Белогорцев А. С., Музыченко В. В. Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 2. С. 228-234.
126. Доценко И. Е., Музыченко В. В., Рыбак С. А. Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 5. С. 922-932.
127. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
128. Лебедев А. В., Хилько А. И. Рассеяние звука упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1057-1065.
129. Белогорцев А. С., Бугаев В. В., Музыченко В. В. Некоторые особенности рассеяния звука упругими оболочками в жидкости // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 4. С. 598-604.

130. Косарев О. И. Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. №4. С. 99-103.
131. Косарев О. И. Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-техн. развития. 2017. № 3. С. 30-37.
132. Толоконников Л. А., Ефимо Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. №4. С. 3-23.
133. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
134. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
135. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
136. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
137. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
138. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
139. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
140. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т. 36. № 1. С. 12-16.
141. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
142. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.